

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Thiemann
Marius Weidner
Simon Dorer

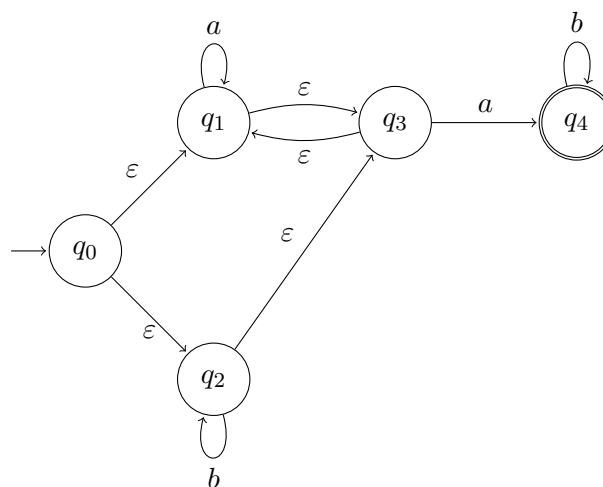
Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2026

Übungsblatt 11 – Lösungen

Abgabe: **Mittwoch, 15.07.2026, 08:00 Uhr**

Aufgabe 11.1 (ε -NEAs; 6 Punkte)

Gegeben sei folgender ε -NEA $\mathcal{B}$:



- Geben Sie $\mathbf{ec1}_{\mathcal{B}}(q)$ für alle Zustände q von $\mathcal{B}$ an.
- Bestimmen Sie $\mathbf{reach}_{\mathcal{B}}(q, w)$ für alle Zustände q und Wörter w von $\mathcal{B}$.
- Welche Sprache akzeptiert $\mathcal{B}$? Definieren Sie $L(\mathcal{B})$ in Mengenschreibweise.
- Geben Sie einen zu $\mathcal{B}$ äquivalenten NEA $\mathcal{N}$ an. Verwenden Sie dazu die Konstruktion aus der Vorlesung. Sie dürfen sich dabei aussuchen, ob Sie $\mathcal{N}$ als formales 5-Tupel oder als Zustandsdiagramm angeben.

Lösung:

- Wir erhalten den ε -Abschluss $\mathbf{ec1}_{\mathcal{B}}$, indem wir mit Breitensuche entlang der ε -Übergänge von $\mathcal{B}$ gehen:

q	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
$\mathbf{ec1}_{\mathcal{B}}(q)$	$\{q_0, q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_4\}$

- Wir verwenden die Notation aus der Vorlesung und notieren in Zeile q und

Spalte p die Sprache $\{w \in \Sigma^* \mid p \in \text{reach}_{\mathcal{B}}(q, w)\}$:

$\text{reach}_{\mathcal{B}}$	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_0	$\{\varepsilon\}$	$\{b\}^* \cdot \{a\}^*$	$\{b\}^*$	$\{b\}^* \cdot \{a\}^*$	$\{b\}^* \cdot \{a\}^+ \cdot \{b\}^*$
q_1	$\emptyset$	$\{a\}^*$	$\emptyset$	$\{a\}^*$	$\{a\}^+ \cdot \{b\}^*$
q_2	$\emptyset$	$\{b\}^* \cdot \{a\}^*$	$\{b\}^*$	$\{b\}^* \cdot \{a\}^*$	$\{b\}^* \cdot \{a\}^+ \cdot \{b\}^*$
q_3	$\emptyset$	$\{a\}^*$	$\emptyset$	$\{a\}^*$	$\{a\}^+ \cdot \{b\}^*$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{b\}^*$

- (c) Nach Definition der akzeptierten Sprache eines ε -NEAs gilt für jedes Wort $w \in \Sigma^*$:

$$w \in L(\mathcal{B}) \iff \text{reach}_{\mathcal{B}}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset.$$

Da $F = \{q_4\}$, müssen wir also genau die Wörter betrachten, die von q_0 nach q_4 führen. Aus der Tabelle in (b) lesen wir ab:

$$L(\mathcal{B}) = \{b\}^* \cdot \{a\}^+ \cdot \{b\}^* = \{b^i a^j b^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } j \geq 1\}.$$

- (d) Nach der Konstruktion aus der Vorlesung erhalten wir den ε -freien NEA

$$\mathcal{N} = (\Sigma, Q, \delta_{\mathcal{N}}, q_0, F_{\mathcal{N}})$$

mit

$$\Sigma = \{a, b\}, \quad Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \quad F_{\mathcal{N}} = \{q_4\}.$$

Die Übergangsfunktion ist für $q \in Q$ und $x \in \Sigma$ definiert durch

$$\delta_{\mathcal{N}}(q, x) = \bigcup_{q'' \in \hat{\delta}(\text{ecl}_{\mathcal{B}}(q), x)} \text{ecl}_{\mathcal{B}}(q'')$$

Also:

$\delta_{\mathcal{N}}$	a	b
q_0	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
q_3	$\{q_1, q_3, q_4\}$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\{q_4\}$

Aufgabe 11.2 (Potenzmengenkonstruktion; 5 Punkte)

Wir betrachten folgende reguläre Sprache:

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält ein Teilwort der Form } axb \text{ mit } x \in \{a, b\}^*\}.$$

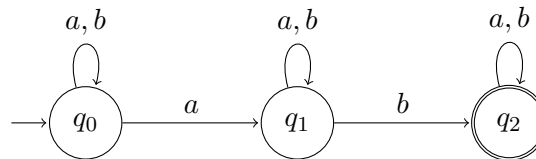
- (a) Geben Sie einen NEA $\mathcal{N}$ an, der L akzeptiert. Verwenden Sie in ihrer Konstruktion Nichtdeterminismus.



- (b) Geben Sie einen zu $\mathcal{N}$ äquivalenten DEA $\mathcal{A}$ an. Verwenden Sie dazu *exakt* das Verfahren aus der Vorlesung (Potenzmengenkonstruktion). Geben Sie also auch insbesondere unerreichbare Zustände an.

Lösung:

(a)



- (b) Sei $\mathcal{N} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ der NEA von Aufgabenteil (a).

Nach der Potenzmengenkonstruktion erhalten wir den DEA

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = (\Sigma, Q_{\mathcal{P}}, \delta_{\mathcal{P}}, q_{\mathcal{P}}^{\text{init}}, F_{\mathcal{P}})$$

mit

$$Q_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(Q), \quad q_{\mathcal{P}}^{\text{init}} = \{q_0\}, \text{ und}$$

$$F_{\mathcal{P}} = \{ S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset \} = \{ \{q_2\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\} \}.$$

Für $S \in Q_{\mathcal{P}}$ und $x \in \Sigma$ ist die Übergangsfunktion definiert durch

$$\delta_{\mathcal{P}}(S, x) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, x).$$

Die Übergänge des DEA sind somit:

$\delta_{\mathcal{P}}$	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

Aufgabe 11.3 (Nicht-Regularität mit Abschlusseigenschaften; 2 Punkte)

Wir betrachten die Sprache

$$L_{\leq} = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \text{ und } n \leq m\}.$$

Zeigen Sie mithilfe der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen unter Schnitt ($\cap$), Vereinigung ($\cup$), Differenz ($\setminus$), Komplement (c), Konkatenation und Kleene-Abschluss (*), dass $L_{\leq}$ nicht regulär ist. Sie dürfen dabei als gegeben annehmen, dass die Sprache

$$\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Lösung:

Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, $L_{\leq}$ ist regulär. Da $\{b\}$ regulär ist und die Klasse der regulären Sprachen unter Konkatenation abgeschlossen ist, wäre auch die Sprache

$$L_{<} := L_{\leq} \cdot \{b\} = \{a^n b^{m+1} \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\} = \{a^n b^k \mid n, k \in \mathbb{N}, n < k\}$$

regulär.

Da die Klasse der regulären Sprachen außerdem unter Differenz abgeschlossen ist, wäre folglich auch

$$\begin{aligned} L_{\leq} \setminus L_{<} &= \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\} \setminus \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n < m\} \\ &= \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \leq m, n \geq m\} \\ &= \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

regulär. Nach Voraussetzung ist die Sprache $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jedoch nicht regulär. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist $L_{\leq}$ nicht regulär. □

Aufgabe 11.4 (Reguläre Grammatiken und reguläre Ausdrücke; 4 Punkte)

Betrachten Sie die reguläre Grammatik

$$G = (\{a, b\}, \{S, A, B, C\}, P, S)$$

mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\rightarrow bS \mid aA, \\ A &\rightarrow aA \mid bB, \\ B &\rightarrow bB \mid aC \mid \varepsilon, \\ C &\rightarrow aC \mid \varepsilon. \end{aligned}$$

- Beschreiben Sie die Sprache $L(G)$ in Worten und geben Sie $L(G)$ in Mengenschreibweise an.
- Geben Sie einen regulären Ausdruck r mit $L(r) = L(G)$ an. Begründen Sie kurz, warum Ihr regulärer Ausdruck korrekt ist.

Lösung:

- (a) Die Grammatik erzeugt genau die Wörter, die aus beliebig vielen b -Symbolen, danach mindestens einem a -Symbol, danach mindestens einem b -Symbol und danach beliebig vielen a -Symbolen bestehen.

In Mengenschreibweise:

$$\{ b^i a^j b^k a^\ell \mid i, j, k, \ell \in \mathbb{N}, j \geq 1, k \geq 1 \}.$$

Begründung: Aus S können zuerst beliebig viele b -Symbole erzeugt werden, bevor mit $S \rightarrow aA$ mindestens ein a erzeugt wird. Aus A können danach beliebig viele weitere a -Symbole erzeugt werden, bevor mit $A \rightarrow bB$ mindestens ein b erzeugt wird. Aus B können weitere b -Symbole erzeugt werden. Danach endet die Ableitung entweder mit $B \rightarrow \varepsilon$, oder sie wechselt mit $B \rightarrow aC$ in eine letzte a -Phase, in der durch $C \rightarrow aC \mid \varepsilon$ beliebig viele a -Symbole erzeugt werden.

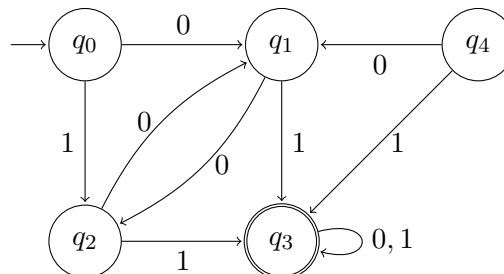
- (b) Ein passender regulärer Ausdruck ist

$$r = b^* a a^* b b^* a^*.$$

Dieser Ausdruck beschreibt genau die in Teil (a) angegebene Form: b^* erzeugt das optionale b -Präfix, aa^* die nichtleere a -Phase, bb^* die nichtleere b -Phase und a^* die optionale letzte a -Phase. Also gilt $\llbracket r \rrbracket = L(G)$.

Aufgabe 11.5 (Minimierung endlicher Automaten; 3 Punkte)

Gegeben sei der folgende DEA $\mathcal{A}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$:



Minimieren Sie $\mathcal{A}$ mit dem Verfahren aus der Vorlesung. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- (a) Entfernen Sie zunächst alle unerreichbaren Zustände.



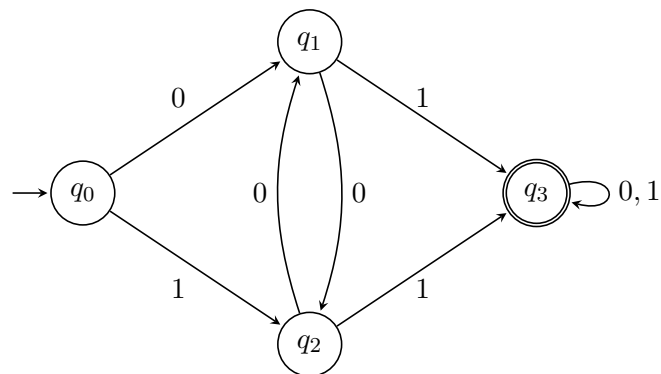
- (b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen der verbleibenden Zustände mit Algorithmus 1 aus Blatt 02. Geben Sie dabei die Markierungstabelle an und markieren Sie jedes nicht-äquivalente Zustandspaar mit einem Symbol $a \in \Sigma$, das die Nicht-Äquivalenz nachweist.

- (c) Geben Sie den minimalen DEA als Zustandsdiagramm an.



Lösung:

- (a) Der Zustand q_4 ist von q_0 aus nicht erreichbar. Wir erhalten $\mathcal{A}'$, indem wir q_4 entfernen:



- (b) Zunächst markieren wir alle Zustandspaare, bei denen genau einer der beiden Zustände akzeptierend ist. Diese Markierungen sind in der Tabelle mit ϵ gekennzeichnet. Alle weiteren Einträge geben das Symbol an, durch das die Nicht-Äquivalenz erkannt wird.

	q_0	q_1	q_2	q_3
q_0				
q_1	1			
q_2	1			
q_3	ϵ	ϵ	ϵ	

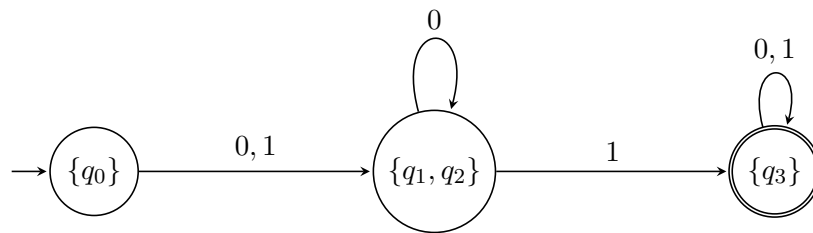
Das einzige nicht markierte Zustandspaar ist

$$(q_1, q_2).$$

Daraus folgen die Äquivalenzklassen

$$\{q_0\}, \quad \{q_1, q_2\}, \quad \{q_3\}.$$

- (c) $\mathcal{A}_{\equiv}$ ist somit gegeben durch:

**Aufgabe 11.6** (Erfahrungen; Datei: `NOTES.md`)

Notieren Sie Ihre Erfahrungen mit diesem Übungsblatt (benötigter Zeitaufwand, Probleme, Bezug zur Vorlesung, Interessantes, etc.).

Editieren Sie hierzu die Datei `NOTES.md` im Abgabeordner dieses Übungsblattes auf unserer Webplattform. Halten Sie sich an das dort vorgegebene Format, da wir den Zeitbedarf automatisch statistisch auswerten. Die Zeitangabe **4.5 h** steht dabei für 4 Stunden und 30 Minuten.