

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Thiemann
Marius Weidner
Simon Dorer

Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2026

Übungsblatt 9 – Lösungen Abgabe: Dienstag, 30.06.2026, 16:00 Uhr

Hinweis:

Die Aufgabenstellungen in Aufgabe 1 und Aufgabe 2 wurden nachträglich präzisiert.
Die geänderten Aufgabentexte sind blau hervorgehoben.

Aufgabe 9.1 (Fallunterscheidungen; 8 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Geben Sie dazu jeweils einen Term in PREC an und begründen Sie, warum dessen Semantik die angegebene Funktion ist.

(a) $\text{iszero} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

(b) $\chi_{=} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

(c) $\text{ite} : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$(c, x, y) \mapsto \begin{cases} x, & c > 0, \\ y, & c = 0. \end{cases}$$

Die Funktion ite kann dabei als äquivalent zu `if  $c$  then  $x$  else  $y$` verstanden werden.

(d) Nutzen Sie die beiden Funktionen aus den Aufgabenteilen b) und c) sowie die Beispiele aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass wir eine primitiv rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ angeben können, die die beiden Eingaben addiert, falls sie gleich sind und multipliziert, falls nicht.

Lösung:

Analog zur Vorlesung unterscheiden wir zwischen Termen und ihren Semantiken. Terme schreiben wir in **Schreibmaschinenschrift**, die dadurch berechnete Funktion ist die Semantik des Terms. Beispielsweise schreiben wir $f = \llbracket \mathbf{f} \rrbracket$, wenn der Term $\mathbf{f}$ die Funktion f berechnet.

Zunächst definieren wir den Term

$$\mathbf{const}_1^k := S \circ [\mathcal{O}^k]$$

für die k -stellige konstante Einsfunktion $\llbracket \mathbf{const}_1^k \rrbracket = 1$.

- (a) Wir definieren den Term **iszero** über primitive Rekursion:

$$\mathbf{iszero} = \text{PR}(\mathbf{g}, \mathbf{h}),$$

wobei

$$\mathbf{g} = \mathbf{const}_1^0, \quad \mathbf{h} = \mathcal{O}^2.$$

Für $\mathbf{iszero} = \llbracket \mathbf{iszero} \rrbracket$ gelten damit die Rekursionsgleichungen

$$\mathbf{iszero}(0) = 1, \quad \mathbf{iszero}(n+1) = 0.$$

Da $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \text{PREC}$, gilt $\mathbf{iszero} \in \text{PREC}$. Also ist $\mathbf{iszero} = \llbracket \mathbf{iszero} \rrbracket \in \llbracket \text{PREC} \rrbracket$.

- (b) Für die Gleichheitsfunktion nutzen wir aus, dass $x = y$ genau dann gilt, wenn sowohl $x \dot{-} y = 0$ als auch $y \dot{-} x = 0$ gilt. Wir definieren den Term

$$\mathbf{eq} = \mathbf{iszero} \circ [\mathbf{add} \circ [\mathbf{sub}, \mathbf{sub} \circ [\pi_2^2, \pi_1^2]]].$$

Für die gesuchte Funktion setzen wir

$$\chi_{=} := \llbracket \mathbf{eq} \rrbracket, \quad \chi_{=}(x, y) = \mathbf{iszero}((x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)).$$

Für $x, y \in \mathbb{N}$ ist der innere Term genau dann semantisch 0, wenn $(x \dot{-} y) + (y \dot{-} x) = 0$ gilt, also genau dann, wenn $x = y$ ist. Deshalb liefert $\chi_{=}(x, y) = 1$ für $x = y$ und $\chi_{=}(x, y) = 0$ für $x \neq y$. Alle verwendeten Terme liegen in PREC , also gilt $\mathbf{eq} \in \text{PREC}$. Damit ist $\chi_{=} \in \llbracket \text{PREC} \rrbracket$.

- (c) Wir definieren den Term **ite** über primitive Rekursion:

$$\mathbf{ite} = \text{PR}(\mathbf{g}, \mathbf{h})$$

mit

$$\mathbf{g} = \pi_2^2, \quad \mathbf{h} = \pi_3^4.$$

Für $\mathbf{ite} = \llbracket \mathbf{ite} \rrbracket$ gelten damit die Rekursionsgleichungen

$$\mathbf{ite}(0, x, y) = \llbracket \mathbf{g} \rrbracket(x, y) = y, \quad \mathbf{ite}(c+1, x, y) = \llbracket \mathbf{h} \rrbracket(\mathbf{ite}(c, x, y), c, x, y) = x.$$

Da $\mathbf{g}$ und $\mathbf{h}$ Projektionsterme sind, ist **ite** durch primitive Rekursion aus primitiv rekursiven Termen konstruiert. Also gilt $\mathbf{ite} \in \text{PREC}$ und damit $\mathbf{ite} \in \llbracket \text{PREC} \rrbracket$. Die zweite Rekursionsgleichung liefert für jedes $c > 0$ den Wert x , während der Anfangswert für $c = 0$ den Wert y liefert.

(d) Wir definieren den Term

$$\mathbf{f} = \mathbf{ite} \circ [\mathbf{eq}, \mathbf{add}, \mathbf{mult}].$$

Die gesuchte Funktion ist $f = \llbracket \mathbf{f} \rrbracket$. Ausgeschrieben gilt also

$$f(x, y) = \text{ite}(\chi_{=}(x, y), \text{add}(x, y), \text{mult}(x, y)).$$

Da $\mathbf{eq}$, $\mathbf{ite}$, $\mathbf{add}$ und $\mathbf{mult}$ in PREC liegen und PREC unter Komposition abgeschlossen ist, gilt $\mathbf{f} \in \text{PREC}$. Also ist $f \in \llbracket \text{PREC} \rrbracket$. Falls $x = y$, ist $\chi_{=}(x, y) = 1$ und damit $f(x, y) = x + y$. Falls $x \neq y$, ist $\chi_{=}(x, y) = 0$ und damit $f(x, y) = x \cdot y$.

Aufgabe 9.2 (Primitive rekursive Funktionen; 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind. Geben Sie dazu jeweils einen Term in PREC an und begründen Sie, warum dessen Semantik die angegebene Funktion ist:

- (a) $\text{fac} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n!$
- (b) Für ein festes $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 0$ die Funktion

$$\text{mod}_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad n \mapsto n \bmod m.$$

Überlegen Sie sich, wie Sie die Funktion als primitive Rekursion mit Fallunterscheidung definieren können.

Lösung:

- (a) Wir definieren den Term $\mathbf{fac}$ über primitive Rekursion:

$$\mathbf{fac} = \text{PR}(\mathbf{g}, \mathbf{h}),$$

wobei

$$\mathbf{g} = \text{const}_1^0, \quad \mathbf{h} = \mathbf{mult} \circ [S \circ [\pi_2^2], \pi_1^2].$$

Für $\text{fac} = \llbracket \mathbf{fac} \rrbracket$ gelten damit die Rekursionsgleichungen

$$\text{fac}(0) = 1, \quad \text{fac}(n+1) = \llbracket \mathbf{h} \rrbracket(\text{fac}(n), n) = (n+1) \cdot \text{fac}(n).$$

Also gilt $\text{fac}(n) = n!$. Da $\mathbf{g}$ und $\mathbf{h}$ in PREC liegen, gilt $\mathbf{fac} \in \text{PREC}$. Damit ist $\text{fac} \in \llbracket \text{PREC} \rrbracket$.

- (b) Sei $m > 0$ fest. Dann gibt es durch m -fache Anwendung von S auf $\mathcal{O}^1$ einen Term

$$\text{const}_m^1 \in \text{PREC} \quad \text{mit} \quad \llbracket \text{const}_m^1 \rrbracket(n) = m.$$

Wir definieren zunächst den Term $\mathbf{next}_m$, der aus einem aktuellen Rest r den nächsten Rest modulo m berechnet:

$$\mathbf{next}_m = \mathbf{ite} \circ [\mathbf{eq} \circ [S \circ [\pi_1^1], \text{const}_m^1], \mathcal{O}^1, S \circ [\pi_1^1]].$$

Für $\text{next}_m = \llbracket \mathbf{next}_m \rrbracket$ gilt also

$$\text{next}_m(r) = \begin{cases} 0, & S(r) = m, \\ S(r), & S(r) \neq m. \end{cases}$$

Nach Aufgabe 9.1 liegen $\mathbf{eq}$ und $\mathbf{ite}$ in PREC , also gilt $\mathbf{next}_m \in \text{PREC}$.

Nun definieren wir den Term $\mathbf{mod}_m$ direkt über primitive Rekursion:

$$\mathbf{mod}_m = \text{PR}(\mathbf{g}, \mathbf{h})$$

mit

$$\mathbf{g} = \mathcal{O}^0, \quad \mathbf{h} = \mathbf{next}_m \circ [\pi_1^2].$$

Für $\mathbf{mod}_m = \llbracket \mathbf{mod}_m \rrbracket$ gelten die Rekursionsgleichungen

$$\mathbf{mod}_m(0) = 0, \quad \mathbf{mod}_m(n+1) = \mathbf{next}_m(\mathbf{mod}_m(n)).$$

Für $m > 0$ zählt diese Rekursion die Werte $0, 1, \dots, m-1, 0, \dots$ zyklisch weiter. Daher gilt $\mathbf{mod}_m(n) = n \bmod m$. Da $\mathbf{g}$ und $\mathbf{h}$ in PREC liegen, gilt $\mathbf{mod}_m \in \text{PREC}$, also $\mathbf{mod}_m \in \llbracket \text{PREC} \rrbracket$.

Aufgabe 9.3 (Beschränkte Summen primitiv rekursiver Funktionen; 6 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass

$$g(x_1, \dots, x_k, n) = \sum_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_k, i)$$

auch primitiv rekursiv ist.

(b) Schließen Sie aus Aufgabenteil a), $\mathbf{mod}_5$ aus Aufgabe 2b), sowie χ_5 aus Aufgabe 1b), dass die Funktion

$$n \mapsto \text{Anzahl der durch 5 teilbaren Zahlen in } \{1, \dots, n\}$$

primitiv rekursiv ist.

Lösung:

(a) Sei $\mathbf{f} \in \text{PREC}$ ein Term mit $f = \llbracket \mathbf{f} \rrbracket$. Wir definieren zunächst den Term $\mathbf{s}$ durch primitive Rekursion über das erste Argument:

$$\mathbf{s} = \text{PR}(\mathbf{g}, \mathbf{h}),$$

wobei

$$\mathbf{g} = \mathcal{O}^k$$

und

$$\mathbf{h} = \mathbf{add} \circ [\pi_1^{k+2}, \mathbf{f} \circ [\pi_3^{k+2}, \dots, \pi_{k+2}^{k+2}, S \circ [\pi_2^{k+2}]]].$$

Für $s = \llbracket \mathbf{s} \rrbracket$ gelten damit die Rekursionsgleichungen

$$s(0, x_1, \dots, x_k) = 0,$$

und

$$s(n+1, x_1, \dots, x_k) = s(n, x_1, \dots, x_k) + f(x_1, \dots, x_k, n+1).$$

Also gilt

$$s(n, x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_k, i).$$

Um die Argumentreihenfolge der Aufgabe zu erhalten, setzen wir

$$\mathbf{sum}_f = \mathbf{s} \circ [\pi_{k+1}^{k+1}, \pi_1^{k+1}, \dots, \pi_k^{k+1}].$$

Für $g = \llbracket \mathbf{sum}_f \rrbracket$ gilt dann

$$g(x_1, \dots, x_k, n) = \sum_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_k, i).$$

Da $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ und $\mathbf{f}$ in PREC liegen, gilt $\mathbf{s} \in \text{PREC}$ und damit auch $\mathbf{sum}_f \in \text{PREC}$. Also ist $g \in \llbracket \text{PREC} \rrbracket$.

(b) Wir definieren den Term

$$\mathbf{div5} = \mathbf{eq} \circ [\mathbf{mod}_5, \mathcal{O}^1].$$

Für $d = \llbracket \mathbf{div5} \rrbracket$ gilt

$$d(i) = \chi_{=(\text{mod}_5(i), 0)}.$$

Damit ist $d(i) = 1$ genau dann, wenn 5 die Zahl i teilt, und sonst ist $d(i) = 0$. Nach Aufgabe 1b) und Aufgabe 2b) liegen $\mathbf{eq}$ und $\mathbf{mod}_5$ in PREC; also gilt $\mathbf{div5} \in \text{PREC}$.

Nach Teil a) gibt es einen Term $\mathbf{count5} \in \text{PREC}$, dessen Semantik $c = \llbracket \mathbf{count5} \rrbracket$ durch

$$c(n) = \sum_{i=1}^n d(i)$$

gegeben ist. Diese Summe zählt genau die Zahlen $i \in \{1, \dots, n\}$, für die $5 \mid i$ gilt. Also berechnet c die Anzahl der durch 5 teilbaren Zahlen in $\{1, \dots, n\}$, und $c \in \llbracket \text{PREC} \rrbracket$.

Aufgabe 9.4 (Erfahrungen; Datei: NOTES.md)

Notieren Sie Ihre Erfahrungen mit diesem Übungsblatt (benötigter Zeitaufwand, Probleme, Bezug zur Vorlesung, Interessantes, etc.).

Editieren Sie hierzu die Datei `NOTES.md` im Abgabepfad dieses Übungsblattes auf unserer Webplattform. Halten Sie sich an das dort vorgegebene Format, da wir den Zeitbedarf automatisch statistisch auswerten. Die Zeitangabe **4.5 h** steht dabei für 4 Stunden und 30 Minuten.