Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Thiemann — Universität Freiburg
Marius Weidner — Institut für Informatik
Simon Dorer — Sommersemester 2026

Übungsblatt 5 – Lösungen

Abgabe: Dienstag, 02.06.2026, 16:00 Uhr

Aufgabe 5.1 (Abschlusseigenschaften; 5 Punkte)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache und sei $R \in \text{REG}$ eine reguläre Sprache. Der Linksquotient von R nach L ist definiert als

$$L^{-1}R := \{\, w \in \Sigma^* \mid \exists v \in L : vw \in R \,\}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie:

$$L^{-1}R \in \text{REG}.$$

Lösung:

Die Aussage ist wahr.

Beweis: Seien $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache und $R \in \text{REG}$ eine reguläre Sprache.

Da R regulär ist, existiert ein DEA

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

mit

$$L(\mathcal{A}) = R.$$

Betrachte nun die Menge aller Zustände, die der Automat nach dem Lesen eines Wortes aus L erreichen kann:

$$I := \{\, \tilde{\delta}(q_0, v) \mid v \in L \,\} \subseteq Q.$$

Da Q endlich ist, ist auch I endlich, unabhängig davon, ob L regulär ist.

Wir konstruieren einen MS-NEA[1]

$$\mathcal{N} = (Q, \Sigma, \delta_{\mathcal{N}}, I, F),$$

wobei

$$\delta_{\mathcal{N}} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q), \qquad \delta_{\mathcal{N}}(q, a) := \{\, \delta(q, a) \,\}$$

für alle $q \in Q$ und $a \in \Sigma$ gilt. Der Automat $\mathcal{N}$ besitzt somit dieselben Übergänge und akzeptierenden Zustände wie $\mathcal{A}$, verwendet aber alle Zustände aus I als Startzustände.

[1] Äquivalent dazu können wir auch einen ε-NEA konstruieren mit einem frischen Startzustand und ausgehenden ε-Übergängen in jeden Zustand aus I.

Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ gilt nun:

$$\begin{aligned} w \in L(\mathcal{N}) &\iff \exists q \in I : \tilde{\delta}_{\mathcal{N}}(q, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\iff \exists q \in I : \tilde{\delta}(q, w) \in F \\ &\iff \exists v \in L : \tilde{\delta}\big(\tilde{\delta}(q_0, v), w\big) \in F \\ &\iff \exists v \in L : \tilde{\delta}(q_0, vw) \in F \\ &\iff \exists v \in L : vw \in R \\ &\iff w \in L^{-1}R. \end{aligned}$$

Also gilt

$$L(\mathcal{N}) = L^{-1}R.$$

Da $\mathcal{N}$ ein endlicher Automat ist, ist seine Sprache regulär und es folgt

$$L^{-1}R \in \mathrm{REG}.$$

Bemerkung: Für die Konstruktion ist nicht erforderlich, dass L regulär ist. Die Sprache L bestimmt lediglich, welche der endlich vielen Zustände von $\mathcal{N}$ als neue Startzustände verwendet werden.

Aufgabe 5.2 (Reguläre Ausdrücke; 5 Punkte)

Geben Sie für jede der folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ einen regulären Ausdruck an, der dieselbe Sprache beschreibt:

(a) Die Sprache aller Wörter, die das Teilwort `aa` nicht enthalten.

(b) Die Sprache aller Wörter, in denen das Teilwort `aa` höchstens einmal und das Teilwort `bb` höchstens einmal vorkommt.

(c) Die Sprache aller Wörter, die mit einer ungeraden Anzahl von `a`-Symbolen enden. (Äquivalent dazu: Das längste Suffix des Wortes, das nur aus `a`-Symbolen besteht, hat ungerade Länge.)

Lösung:

(a)

$$(\mathtt{b} + \mathtt{ab})^*(\mathtt{a} + \underline{\varepsilon})$$

(b)

$$\begin{aligned} &(\mathtt{b} + \underline{\varepsilon})(\mathtt{ab})^*(\mathtt{b} + \underline{\varepsilon})(\mathtt{ab})^*(\mathtt{a}(\mathtt{a} + \underline{\varepsilon})((\mathtt{ba})^*(\mathtt{b} + \underline{\varepsilon})) + \underline{\varepsilon}) \\ +&(\mathtt{a} + \underline{\varepsilon})(\mathtt{ba})^*(\mathtt{a} + \underline{\varepsilon})(\mathtt{ba})^*(\mathtt{b}(\mathtt{b} + \underline{\varepsilon})((\mathtt{ab})^*(\mathtt{a} + \underline{\varepsilon})) + \underline{\varepsilon}) \end{aligned}$$

(c)

$$(\mathtt{b} + \mathtt{a}^*\mathtt{b})^*(\mathtt{aa})^*\mathtt{a}$$

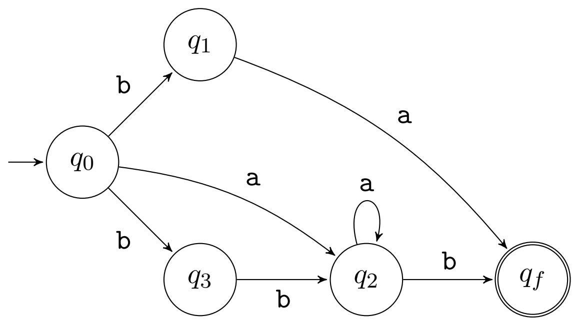
Aufgabe 5.3 (Reguläre Ausdrücke zu NEAs; 5 Punkte)
Geben Sie für die folgenden regulären Ausdrücke jeweils einen NEA an, der die selbe Sprache beschreibt. Beschreiben Sie kurz wie die Komponenten des Diagramms mit den Teilausdrücken des regulären Ausdrucks zusammenhängen.

(a) $\mathtt{ba} + ((\mathtt{a} + \mathtt{bb})\mathtt{a}^*\mathtt{b})$

(b) $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*\mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{bb}^*)$

Lösung:

(a)



Der reguläre Ausdruck

$$\mathtt{ba} + \big((\mathtt{a} + \mathtt{bb})\mathtt{a}^*\mathtt{b}\big)$$

besteht aus zwei Alternativen:

$$\mathtt{ba} \qquad \text{oder} \qquad (\mathtt{a} + \mathtt{bb})\mathtt{a}^*\mathtt{b}.$$

Der obere Pfad

$$q_0 \xrightarrow{\mathtt{b}} q_1 \xrightarrow{\mathtt{a}} q_f$$

entspricht genau dem Teilausdruck $\mathtt{ba}$.

Für den zweiten Teilausdruck führen zwei Möglichkeiten in den Zustand q_2:

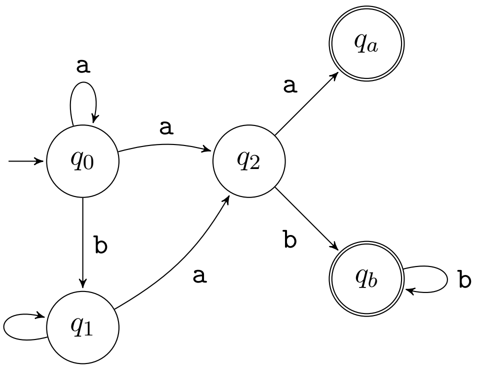
$$q_0 \xrightarrow{\mathtt{a}} q_2 \qquad \text{oder} \qquad q_0 \xrightarrow{\mathtt{b}} q_3 \xrightarrow{\mathtt{b}} q_2.$$

Diese beiden Pfade entsprechen der Alternative $\mathtt{a} + \mathtt{bb}$. In q_2 realisiert die Schleife mit $\mathtt{a}$ den Teil $\mathtt{a}^*$. Der anschließende Übergang

$$q_2 \xrightarrow{\mathtt{b}} q_f$$

entspricht dem letzten Symbol $\mathtt{b}$.

(b)



Der reguläre Ausdruck

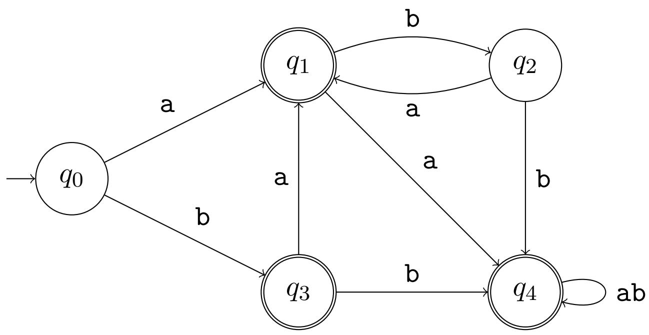
$$\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*\mathtt{a}(\mathtt{a}+\mathtt{bb}^*)$$

besteht aus dem Präfix $\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*$, einem darauf folgenden verpflichtenden Symbol $\mathtt{a}$ und einer abschließenden Alternative.

Die $\mathtt{a}$-Schleife in q_0 realisiert zunächst den Faktor $\mathtt{a}^*$. Ist der Faktor $\mathtt{b}^*$ leer, so liest der Automat das anschließend verpflichtende Symbol $\mathtt{a}$ direkt über den Übergang $q_0 \xrightarrow{\mathtt{a}} q_2$. Ist der Faktor $\mathtt{b}^*$ nicht leer, so liest der Automat über $q_0 \xrightarrow{\mathtt{b}} q_1$ und die $\mathtt{b}$-Schleife in q_1 eine nichtleere Folge von $\mathtt{b}$-Symbolen. Der Übergang $q_1 \xrightarrow{\mathtt{a}} q_2$ liest anschließend das verpflichtende Symbol $\mathtt{a}$.

Von q_2 aus wird der letzte Faktor $\mathtt{a}+\mathtt{bb}^*$ umgesetzt. Der Übergang $q_2 \xrightarrow{\mathtt{a}} q_a$ entspricht der Alternative $\mathtt{a}$. Der Übergang $q_2 \xrightarrow{\mathtt{b}} q_b$ zusammen mit der $\mathtt{b}$-Schleife in q_b entspricht der Alternative $\mathtt{bb}^*$.

Aufgabe 5.4 (DEAs zu Regulären Ausdrücken; 5 Punkte)
Benutzen Sie das in der Vorlesung gezeigte Verfahren um den folgenden DEA in einen äquivalenten regulären Ausdruck zu übersetzen. Geben Sie dabei an, was Sie in jedem Schritt substituieren und welches neue Gleichungssystem Sie dadurch erhalten.



Lösung:

Hinweis: In dieser Aufgabe verwenden wir die Notation $r = r'$ für zwei reguläre

Ausdrücke r und r' und meinen damit, dass r und r' dieselbe Sprache repräsentieren, d.h. $[\![r]\!] = [\![r']\!]$.

$$\begin{aligned}
r_0 &= \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}r_3 \\
r_1 &= \underline{\varepsilon} + \mathtt{a}r_4 + \mathtt{b}r_2 \\
r_2 &= \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}r_4 \\
r_3 &= \underline{\varepsilon} + \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}r_4 \\
r_4 &= \underline{\varepsilon} + (\mathtt{a} + \mathtt{b})r_4
\end{aligned}$$

Setze $r_4 := (\mathtt{a} + \mathtt{b})^*\underline{\varepsilon} = (\mathtt{a} + \mathtt{b})^*$ (mit Ardens Lemma, $A = (\mathtt{a} + \mathtt{b}), B = \underline{\varepsilon}$)

$$\begin{aligned}
r_0 &= \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}r_3 \\
r_1 &= \underline{\varepsilon} + \mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* + \mathtt{b}r_2 \\
r_2 &= \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* \\
r_3 &= \underline{\varepsilon} + \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*
\end{aligned}$$

Setze $r_3 := \underline{\varepsilon} + \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*$ (ergibt sich direkt aus der Gleichung für r_3)

$$\begin{aligned}
r_0 &= \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}(\underline{\varepsilon} + \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*) \\
&= \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b} + \mathtt{ba}r_1 + \mathtt{bb}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* \\
&= (\mathtt{a} + \mathtt{ba})r_1 + \mathtt{b} + \mathtt{bb}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* \\
r_1 &= \underline{\varepsilon} + \mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* + \mathtt{b}r_2 \\
r_2 &= \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*
\end{aligned}$$

Setze $r_2 := \mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*$ (ergibt sich direkt aus der Gleichung für r_2)

$$\begin{aligned}
r_0 &= (\mathtt{a} + \mathtt{ba})r_1 + \mathtt{b} + \mathtt{bb}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* \\
r_1 &= \underline{\varepsilon} + \mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* + \mathtt{b}(\mathtt{a}r_1 + \mathtt{b}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*) \\
&= \underline{\varepsilon} + \mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* + \mathtt{ba}r_1 + \mathtt{bb}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*
\end{aligned}$$

Setze $r_1 := (\mathtt{ba})^*(\underline{\varepsilon} + \mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* + \mathtt{bb}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*)$ (mit Ardens Lemma, $A = \mathtt{ba}, B = (\underline{\varepsilon} + \mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* + \mathtt{bb}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*)$)

$$r_0 = (\mathtt{a} + \mathtt{ba})(\mathtt{ba})^*(\underline{\varepsilon} + \mathtt{a}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^* + \mathtt{bb}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*) + \mathtt{b} + \mathtt{bb}(\mathtt{a} + \mathtt{b})^*$$