Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Thiemann
Marius Weidner
Simon Dorer

Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2026

Übungsblatt 4 – Lösungen

Abgabe: Dienstag, 19.05.2026, 16:00 Uhr

Hinweis: Bei Fragen zu den Übungsblättern oder zu allgemeinen Themen der Vorlesung können Sie sich gerne über unseren Chat an uns wenden (hier). Wir beantworten Ihre Fragen gerne! Zögern Sie also nicht, den Chat zu nutzen. :)

Aufgabe 4.1 (NEAs konstruieren; 5 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils ein Zustandsdiagramm eines *nichtdeterministischen endlichen Automaten* (NEA) an, der die Sprache akzeptiert.

Beschreiben Sie außerdem kurz, was die einzelnen Zustände Ihres NEAs intuitiv bedeuten, damit Ihr Tutor/ Ihre Tutorin besser nachvollziehen kann, wie Ihr Automat arbeitet.

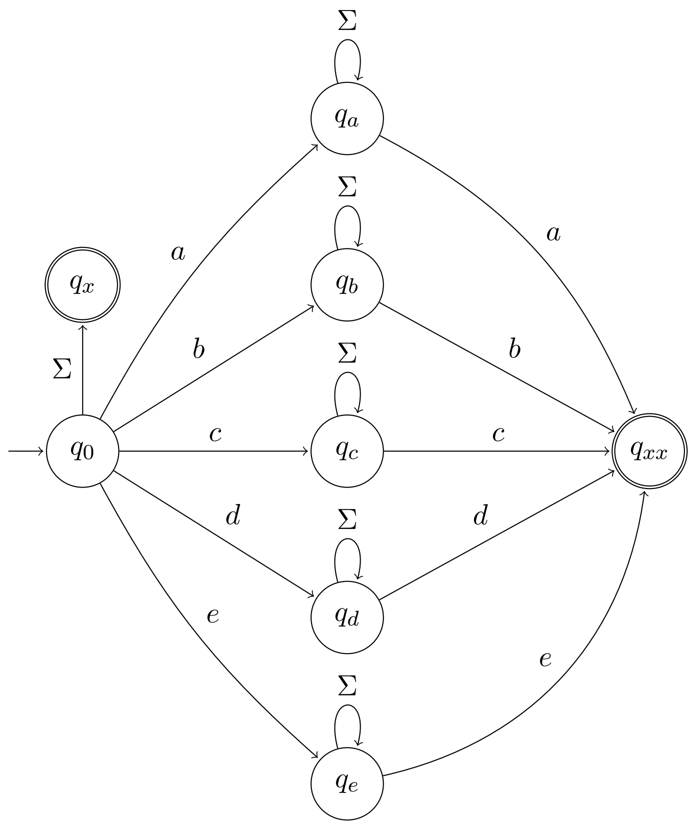
(a) $L_1 = \{w \in \{a, b, c, d, e\}^* \mid w \neq \varepsilon \text{ beginnt und endet mit dem gleichen Zeichen}\}$

(b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ enthält mindestens einmal eine der Zeichenfolgen `aaba`, `abb` oder `ababa`$\}$

Halten Sie die Anzahl der Zustände hier möglichst klein, indem Sie Zustände wiederverwenden.

Lösung:

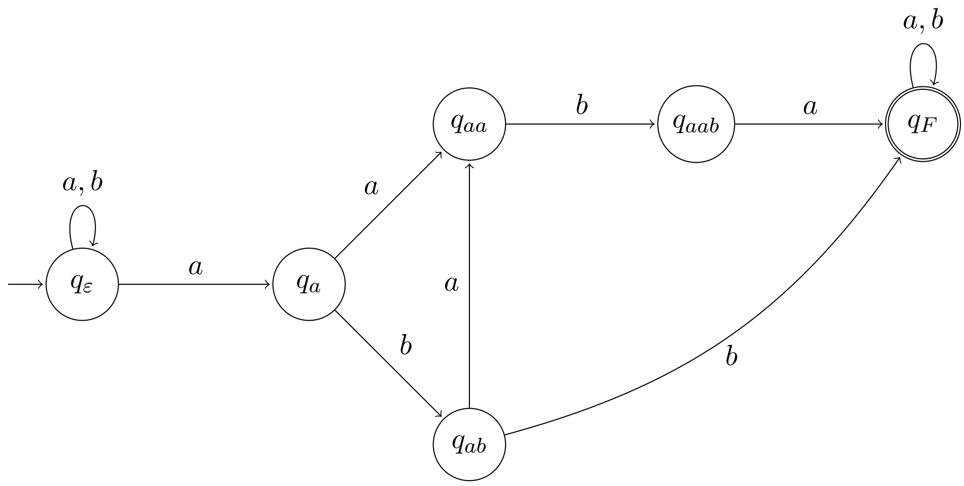
(a) *Idee:* Der Automat liest zuerst ein Zeichen und merkt sich in einem passenden Zustand, mit welchem Buchstaben das Wort begonnen hat. Danach kann er beliebig viele weitere Zeichen lesen. Wenn später wieder derselbe Buchstabe gelesen wird, darf der NEA nichtdeterministisch entscheiden, dass dies das letzte Zeichen des Wortes ist, und in den akzeptierenden Zustand wechseln. Da dieser akzeptierende Zustand keine ausgehenden Übergänge besitzt, wird das Wort nur dann akzeptiert, wenn der erste und der letzte Buchstabe übereinstimmen. Wörter der Länge 1 werden separat akzeptiert, da ihr erstes Zeichen zugleich ihr letztes Zeichen ist.



Bedeutung der Zustände:

- q_0: Startzustand; es wurde noch kein Zeichen gelesen.
- q_a, q_b, q_c, q_d, q_e: das erste Zeichen des Wortes war a, b, c, d bzw. e. Der Automat bleibt in diesem Zustand, solange noch keine nichtdeterministische Auswahl getroffen wurde, das aktuelle Zeichen als letztes Zeichen des Wortes zu behandeln.
- q_{xx}: der Automat hat ein Zeichen gelesen, das mit dem ersten Zeichen des Wortes übereinstimmt, und dieses Zeichen nichtdeterministisch als mögliches Wortende ausgewählt. Da es von hier keine ausgehenden Übergänge gibt, wird nur akzeptiert, wenn das ausgewählte Zeichen tatsächlich das letzte Zeichen der Eingabe war.
- q_x: akzeptierender Zustand für Wörter der Länge 1. In diesem Fall ist das einzige gelesene Zeichen gleichzeitig erster und letzter Buchstabe.

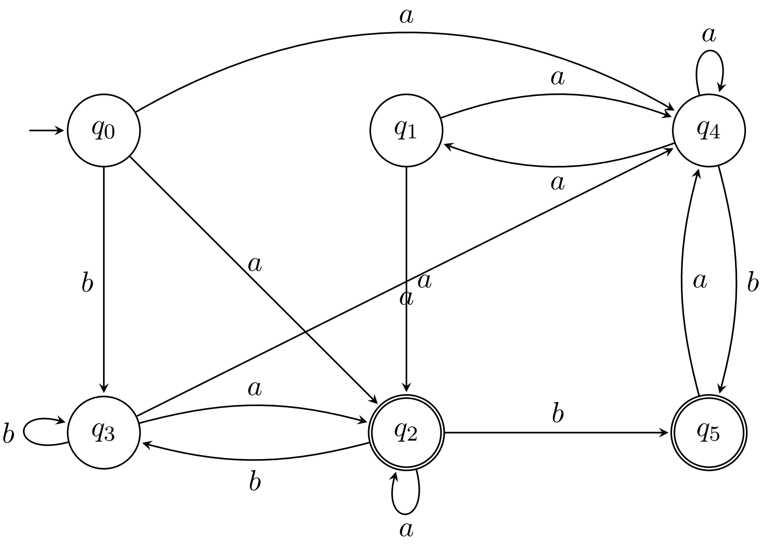
(b) *Idee:* Der Automat sucht innerhalb des Eingabewortes nach einem der Teilwörter *aaba*, *abb* oder *ababa*. Dafür kann er zunächst ein beliebiges Präfix ignorieren. Sobald ein a gelesen wird, kann der NEA nichtdeterministisch entscheiden, dass an dieser Stelle ein Zielwort beginnt. Anschließend merkt sich der Automat jeweils, welcher Anfang eines Zielwortes bereits gelesen wurde. Die Zustände werden dabei für gemeinsame Präfixe wiederverwendet: Nach einem gelesenen ab kann zum Beispiel entweder durch ein weiteres b das Wort abb beendet werden oder durch aba weiter nach $ababa$ gesucht werden. Sobald eines der drei Zielwörter vollständig erkannt wurde, wechselt der Automat in den akzeptierenden Zustand und akzeptiert danach beliebige weitere Zeichen.



Bedeutung der Zustände:

- q_ε: Es wurde noch kein konkreter Start eines Zielwortes ausgewählt. Der Automat kann hier beliebige Zeichen als Präfix überspringen.
- q_a: Der Automat hat ein a als möglichen Anfang eines Zielwortes gewählt.
- q_{aa}: Der Automat hat entweder den Anfang aa von $aaba$ oder den Anfang aba von $ababa$ gelesen. In beiden Fällen muss als nächstes ein b folgen.
- q_{ab}: Der Automat hat den Anfang ab gelesen. Von hier aus kann durch ein weiteres b das Zielwort abb abgeschlossen werden, oder durch ein a die Suche nach $ababa$ weitergehen.
- q_{aab}: Der Automat hat entweder den Anfang aab von $aaba$ oder den Anfang $abab$ von $ababa$ gelesen. In beiden Fällen fehlt nur noch ein a, um ein Zielwort vollständig zu erkennen.
- q_F: Eines der Zielwörter $aaba$, $ababa$ oder abb wurde als Teilwort gefunden. Danach werden beliebige weitere Zeichen akzeptiert.

Aufgabe 4.2 (Potenzmengenkonstruktion; 7 Punkte)
Gegeben sei der folgende NEA $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\text{init}}, F)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

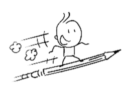


Wenden Sie die in der Vorlesung vorgestellte *Potenzmengenkonstruktion* an, um aus $\mathcal{A}$ einen äquivalenten DEA $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', \delta', q_0', F')$ zu konstruieren. Beachten Sie dabei:

- Geben Sie $\mathcal{A}'$ als 5-Tupel an und benennen Sie die Zustände von $\mathcal{A}'$ eindeutig als *Teilmengen* von Q.
- Geben Sie δ' nur für die vom Startzustand aus *erreichbaren* Zustände an. Stellen Sie δ' tabellarisch dar, etwa nach folgendem Schema:

δ'	a	b
$\{q_0\}$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$		

- Geben Sie zusätzlich ein Zustandsdiagramm von $\mathcal{A}'$ an.



Lösung:

Wir wenden die Potenzmengenkonstruktion auf $\mathcal{A}$ an. Die Zustände des konstruierten DEA $\mathcal{A}'$ sind Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(Q)$ (also Teilmengen von $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$) mit

$$\delta'(S, x) = \bigcup_{q \in S} \delta(q, x)\,, \qquad q_0' = \{q^{\text{init}}\}\,, \qquad F' = \{S \in Q' \mid S \cap F \neq \emptyset\}\,.$$

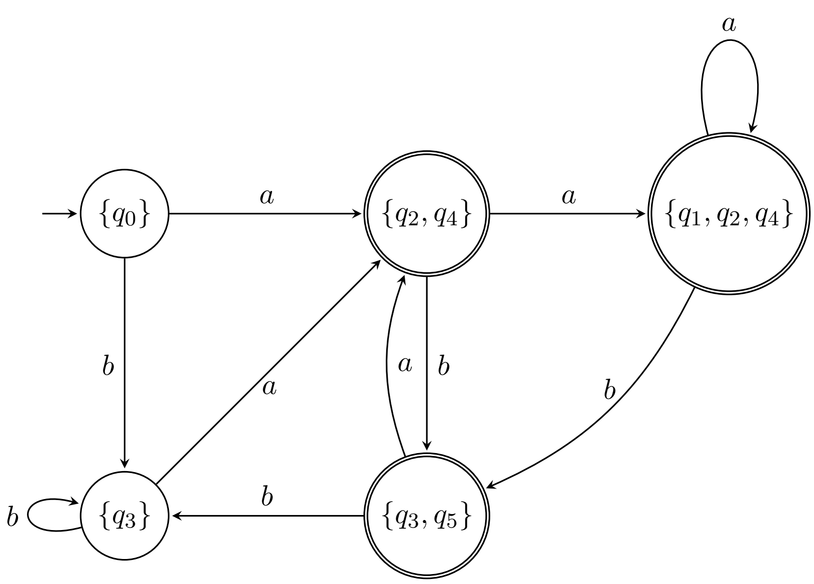
Wir berechnen die Übergangsfunktion ausgehend von $q_0' = \{q_0\}$ durch iteratives Traversieren der Kanten im Graphen, bis keine neuen Zustände mehr hinzukommen.

δ'	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_3\}$
$\{q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_3, q_5\}$
$\{q_3\}$	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_3\}$
$\{q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_3, q_5\}$
$\{q_3, q_5\}$	$\{q_2, q_4\}$	$\{q_3\}$

Somit ergibt sich $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', \delta', q_0', F')$ mit

- $\Sigma = \{a, b\}$
- $Q' = \{\{q_0\},\ \{q_2, q_4\},\ \{q_3\},\ \{q_1, q_2, q_4\},\ \{q_3, q_5\}\}$
- δ' wie in der Tabelle oben.
- $q_0' = \{q_0\}$
- $F' = \{\{q_2, q_4\},\ \{q_1, q_2, q_4\},\ \{q_3, q_5\}\}$ (alle Zustände, die q_2 oder q_5 enthalten)

und das folgende Zustandsdiagramm:



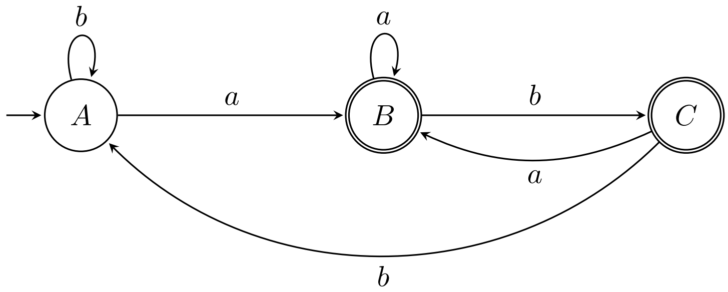
Zusätzliche Bemerkung (Minimierung). Der durch die Potenzmengenkonstruktion erzeugte DEA ist nicht zwingend minimal. Hier sind sogar mehrere Zustände äquivalent:

- $\{q_0\} \equiv \{q_3\}$: beide nicht-akzeptierend, beide gehen auf a nach $\{q_2, q_4\}$ und auf b in die eigene Klasse.
- $\{q_2, q_4\} \equiv \{q_1, q_2, q_4\}$: beide akzeptierend mit identischen Folgezuständen ($a \to \{q_1, q_2, q_4\}$, $b \to \{q_3, q_5\}$).

Verschmilzt man diese Klassen, so erhält man den *minimalen* äquivalenten DEA mit nur 3 Zuständen:

$$A := [\{q_0\}] = [\{q_3\}]\,, \qquad B := [\{q_2, q_4\}] = [\{q_1, q_2, q_4\}]\,, \qquad C := [\{q_3, q_5\}]\,.$$

mit Übergängen $A \xrightarrow{a} B$, $A \xrightarrow{b} A$, $B \xrightarrow{a} B$, $B \xrightarrow{b} C$, $C \xrightarrow{a} B$, $C \xrightarrow{b} A$, Startzustand A und akzeptierenden Zuständen $\{B, C\}$.



Aufgabe 4.3 (Pumping-Lemma; 8 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen *nicht regulär* sind:

(a) $L_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

(b) $L_2 = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ über $\Sigma = \{a\}$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie groß der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen ist.

Lösung:

(a) Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen, L_1 sei regulär. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Pumping-Länge $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$, sodass jedes Wort $z \in L_1$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvw$ mit

$$|uv| \leq n, \qquad |v| \geq 1$$

besitzt, für die $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Betrachte das Wort

$$z = a^n b^n \in L_1.$$

Es gilt $|z| = 2n \geq n$. Sei nun $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$.

Wegen $|uv| \leq n$ liegen u und v vollständig im ersten a-Block. Also gibt es $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq 1$, $k + \ell + m = n$ und

$$u = a^k, \qquad v = a^\ell, \qquad w = a^m b^n.$$

Pumpen mit $i = 2$ liefert

$$uv^2 w = a^k a^{2\ell} a^m b^n = a^{n+\ell} b^n.$$

Wegen $\ell \geq 1$ enthält dieses Wort strikt mehr a's als b's. Daher gilt

$$uv^2w \notin L_1.$$

Das widerspricht der Aussage des Pumping-Lemmas. Also ist L_1 nicht regulär.

$\square$

(b) Wieder führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, L_2 sei regulär. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ die Pumping-Länge aus dem Pumping-Lemma.

Betrachte das Wort

$$z = a^{n^2} \in L_2.$$

Wegen $n > 0$ gilt $|z| = n^2 \geq n$. Sei $z = uvw$ eine beliebige Zerlegung mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$. Da das Alphabet nur aus a besteht, gibt es $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ mit

$$u = a^k, \qquad v = a^\ell, \qquad w = a^m, \qquad k + \ell + m = n^2, \qquad 1 \leq \ell \leq n.$$

Die obere Schranke $\ell \leq n$ folgt aus $|uv| \leq n$.

Pumpen mit $i = 2$ ergibt

$$uv^2w = a^{k+2\ell+m} = a^{n^2+\ell}.$$

Damit $uv^2w \in L_2$ wäre, müsste $n^2 + \ell$ eine Quadratzahl sein. Wegen $\ell \geq 1$ gilt

$$n^2 < n^2 + \ell \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Die Zahl $n^2+\ell$ liegt also echt zwischen den aufeinanderfolgenden Quadratzahlen n^2 und $(n + 1)^2$. Folglich ist $n^2 + \ell$ keine Quadratzahl und damit

$$uv^2w \notin L_2.$$

Dies widerspricht dem Pumping-Lemma. Also ist L_2 nicht regulär.

$\square$

Aufgabe 4.4 (*Bonusaufgabe*: NEAs mit mehreren Startzuständen; 3 Bonuspunkte)
In der Vorlesung wurde der NEA mit *genau einem* Startzustand definiert. In der Literatur findet man auch eine etwas allgemeinere Variante, die eine *Menge* von Startzuständen erlaubt. Wir nennen sie kurz *MS-NEA*.

Ein *MS-NEA* ist ein 5-Tupel $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, S, F)$, wobei Σ, Q, δ und F wie beim klassischen NEA aus der Vorlesung definiert sind und $S \subseteq Q$ eine Menge von Startzuständen ist.

Zeigen Sie, dass MS-NEA und klassischer NEA dieselbe Sprachklasse akzeptieren:

(a) Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, S, F)$ ein MS-NEA. Konstruieren Sie einen klassischen NEA $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', \delta', q^{\text{init}}, F')$ mit $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$. Geben Sie $\mathcal{A}'$ als 5-Tupel an.

(b) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion, also $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$. Führen Sie das Argument sorgfältig in beide Richtungen.

Lösung:

(a) Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, S, F)$ ein MS-NEA. Wir konstruieren den klassischen NEA $\mathcal{A}' = (\Sigma, Q', \delta', q^{\text{init}}, F')$ wie folgt:

- $Q' = Q \cup \{q^{\text{init}}\}$, wobei $q^{\text{init}} \notin Q$ ein frischer Zustand ist.
- Die Übergangsfunktion $\delta' : Q' \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q')$ ist definiert durch

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \bigcup\limits_{s \in S} \delta(s, a) & \text{falls } q = q^{\text{init}}, \\ \delta(q, a) & \text{falls } q \in Q. \end{cases}$$

  Aus dem neuen Startzustand simuliert $\mathcal{A}'$ also alle Übergänge, die ein beliebiger Startzustand aus S in $\mathcal{A}$ machen würde.

- $F' = \begin{cases} F \cup \{q^{\text{init}}\}, & \text{falls } S \cap F \neq \emptyset, \\ F, & \text{sonst.} \end{cases}$

  Der neue Startzustand ist genau dann akzeptierend, wenn schon einer der ursprünglichen Startzustände akzeptierend war – so wird auch das leere Wort korrekt behandelt.

(b) **Korrektheit:** Wir zeigen $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$ durch eine Argumentation in beide Richtungen.

„$\subseteq$“: Sei $w \in L(\mathcal{A})$. Dann gibt es einen initialen, akzeptierenden Lauf $q_0, q_1, \ldots, q_{|w|}$ von $\mathcal{A}$ über w, d. h. $q_0 \in S$, $q_{|w|} \in F$ und $q_{i+1} \in \delta(q_i, w_{i+1})$ für alle $0 \leq i < |w|$.

Fall $w = \varepsilon$: Dann ist $q_0 \in S \cap F$, also $S \cap F \neq \emptyset$ und somit $q^{\text{init}} \in F'$. Der Lauf q^{init} ist initial und akzeptierend in $\mathcal{A}'$, also $\varepsilon \in L(\mathcal{A}')$.

Fall $w = a \cdot w'$ mit $a \in \Sigma$: Wegen $q_1 \in \delta(q_0, a)$ und $q_0 \in S$ gilt nach Definition von δ' auch $q_1 \in \delta'(q^{\text{init}}, a)$. Da δ' auf Q mit δ übereinstimmt, ist $q^{\text{init}}, q_1, q_2, \ldots, q_{|w|}$ ein initialer, akzeptierender Lauf von $\mathcal{A}'$ über w. Also $w \in L(\mathcal{A}')$.

„$\supseteq$“: Sei $w \in L(\mathcal{A}')$ mit initialem, akzeptierendem Lauf $p_0, p_1, \ldots, p_{|w|}$ in $\mathcal{A}'$, wobei $p_0 = q^{\text{init}}$.

Fall $w = \varepsilon$: Dann muss $p_0 = q^{\text{init}} \in F'$ sein, also $S \cap F \neq \emptyset$ nach Konstruktion. Sei $s \in S \cap F$. Dann ist der Lauf s initial und akzeptierend in $\mathcal{A}$, also $\varepsilon \in L(\mathcal{A})$.

Fall $w = a \cdot w'$: Es gilt $p_1 \in \delta'(q^{\text{init}}, a) = \bigcup_{s \in S} \delta(s, a)$, also gibt es ein $s \in S$ mit $p_1 \in \delta(s, a)$. Da alle weiteren Übergänge in δ liegen (denn $p_1, \ldots, p_{|w|} \in Q$ und

δ' stimmt auf Q mit δ überein), ist $s, p_1, p_2, \ldots, p_{|w|}$ ein initialer, akzeptierender Lauf von $\mathcal{A}$ über w. Also $w \in L(\mathcal{A})$.

$\square$

Aufgabe 4.5 (Erfahrungen; Datei: `NOTES.md`)

Notieren Sie Ihre Erfahrungen mit diesem Übungsblatt (benötigter Zeitaufwand, Probleme, Bezug zur Vorlesung, Interessantes, etc.).

Editieren Sie hierzu die Datei `NOTES.md` im Abgabeordner dieses Übungsblattes auf unserer Webplattform. Halten Sie sich an das dort vorgegebene Format, da wir den Zeitbedarf automatisch statistisch auswerten. Die Zeitangabe `4.5 h` steht dabei für 4 Stunden und 30 Minuten.