Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Thiemann
Marius Weidner
Simon Dorer

Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2026

Übungsblatt 3 – Lösungen

Abgabe: Dienstag, 12.05.2026, 16:00 Uhr

Hinweis: Bei Fragen zu den Übungsblättern oder zu allgemeinen Themen der Vorlesung können Sie sich gerne über unseren Chat an uns wenden (hier). Wir beantworten Ihre Fragen gerne — zögern Sie also nicht, den Chat zu nutzen. :)

Aufgabe 3.1 (Nerode-Äquivalenzrelation; 5 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$ regulär sind oder nicht. Zeigen bzw. widerlegen Sie hierzu, dass die Nerode-Äquivalenzrelation $R_{L\langle\cdot\rangle}$ endlich viele Äquivalenzklassen besitzt.

(a) $L_1 = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \bmod 2 = 0\}$

(b) $L_2 = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Lösung:

Wir erinnern uns an die Definition der Nerode-Äquivalenz $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ einer Sprache L aus der Vorlesung:

$$R_L = \{(u, v) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \forall w \in \Sigma^* : uw \in L \iff vw \in L\}$$

(a) L_1 ist regulär.

Beweis:

Wir bemerken zunächst:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \bmod 2 = 0\} \\ &= \{a^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \bmod 2 = 0\} \\ &= \{a^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Die Sprache L_1 enthält also genau die Wörter über $\{a\}$, deren Länge durch 4 teilbar ist.

Um die Nerode-Äquivalenzklassen zu betrachten, reicht es also, die Länge eines Wortes modulo 4 zu kennen. Für zwei Wörter a^i und a^j gilt:

$$a^i \equiv_{R_{L_1}} a^j \quad \iff \quad i \bmod 4 = j \bmod 4.$$

Es gibt daher genau vier Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned}[\varepsilon]_{R_{L_1}} &= \{a^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\},\\ [a]_{R_{L_1}} &= \{a^{4n+1} \mid n \in \mathbb{N}\},\\ [a^2]_{R_{L_1}} &= \{a^{4n+2} \mid n \in \mathbb{N}\},\\ [a^3]_{R_{L_1}} &= \{a^{4n+3} \mid n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Diese entsprechen den Restklassen der Wortlänge modulo 4.

Da die Nerode-Äquivalenzrelation nur endlich viele Äquivalenzklassen besitzt, ist L_1 nach dem Satz von Myhill-Nerode regulär.

□

(b) L_2 ist nicht regulär.

Beweis:

Betrachte die *unendliche* Menge

$$M = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma^*.$$

Wir zeigen nun, dass alle Wörter aus M paarweise nicht äquivalent sind.

Seien dazu

$$u = a^{2^n} \quad \text{und} \quad v = a^{2^m}$$

mit $n < m$. Wähle als Fortsetzung

$$w = a^{2^m}.$$

Dann gilt:

$$uw = a^{2^n} a^{2^m} = a^{2^n + 2^m}.$$

Wegen $n < m$ gilt:

$$2^m < 2^m + 2^n < 2^m + 2^m = 2^{m+1}$$

und somit folgt

$$uw \notin L_2.$$

Andererseits gilt:

$$vw = a^{2^m} a^{2^m} = a^{2^m + 2^m} = a^{2^{m+1}} \in L_2.$$

Damit existiert für u und v eine Fortsetzung w, sodass

$$uw \notin L_2 \quad \text{und} \quad vw \in L_2.$$

Also gilt $u \not\equiv_{R_{L_2}} v$. Da $n < m$ beliebig gewählt waren, sind alle Wörter aus M paarweise nicht äquivalent.

Da M unendlich ist, besitzt R_{L_2} unendlich viele Äquivalenzklassen. Nach dem Satz von Myhill-Nerode ist L_2 daher nicht regulär.

□

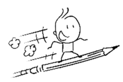
Aufgabe 3.2 (DEAs und reguläre Sprachen; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen regulär sind, indem Sie jeweils einen DEA konstruieren, der sie akzeptiert.

Beschreiben Sie außerdem kurz das Funktionsprinzip des Automaten sowie die Bedeutung der Zustände und der Transitionsfunktion, damit Ihr Tutor besser versteht, wie Ihr Automat arbeitet.

(a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} : w \text{ ist die Binärdarstellung von } 4^n\}$

Wir erlauben dabei führende Nullen, d.h. `100`, `0100` und `0000100` sind dabei gültige Repräsentationen von $4^1 = 4$. Außerdem interpretieren wir ε als die Binärdarstellung von 0.



(b) $L_2 = \{w \in \{a, \ldots, z\}^* \mid \text{jedes in } w \text{ enthaltene Zeichen kommt mindestens zweimal vor}\}$

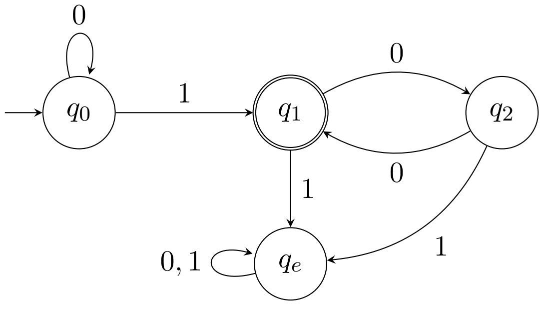
Geben Sie Ihren DEA als 5-Tupel an!

Lösung:

(a) Die Binärdarstellung von $4^n = 2^{2n}$ besteht aus einer 1, gefolgt von $2n$ Nullen. Da führende Nullen erlaubt sind, gilt:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists n \in \mathbb{N} : w \text{ ist die Binärdarstellung von } 4^n\} \\ &= \{0^k \mid k \in \mathbb{N}\} \cdot \{1\} \cdot \{0^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Ein DEA $\mathcal{A}_1$ für L_1 ist:



Die Zustände haben folgende Bedeutung:

- q_0: Es wurden bisher nur führende Nullen gelesen.
- q_1: Es wurde eine gültige Binärdarstellung von 4^n gelesen.
- q_2: Nach der ersten 1 wurde eine ungerade Anzahl an Nullen gelesen.
- q_e: Fehlerzustand, da nach der ersten 1 eine weitere 1 gelesen wurde.

$\mathcal{A}_1$ akzeptiert also genau dann, wenn nach beliebig vielen führenden Nullen genau eine 1 folgt und danach eine gerade Anzahl an Nullen gelesen wird.

□

(b) Für L_2 konstruieren wir einen DEA, der für jeden Buchstaben speichert, ob dieser bisher gar nicht, genau einmal oder mindestens zweimal gelesen wurde.

Sei

$$\Sigma = \{a, \dots, z\}.$$

Wir definieren den DEA

$$\mathcal{A}_2 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

mit

$$Q = \{0, 1, 2\}^{|\Sigma|} = \{0, 1, 2\}^{26}.$$

Ein Zustand ist also ein Tupel

$$q = (q_a, q_b, \dots, q_z) \in Q.$$

Dabei bedeutet für jeden Buchstaben $x \in \Sigma$:

$$q_x = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ bisher nicht vorgekommen ist,} \\ 1, & \text{falls } x \text{ bisher genau einmal vorgekommen ist,} \\ 2, & \text{falls } x \text{ bisher mindestens zweimal vorgekommen ist.} \end{cases}$$

Der Startzustand ist

$$q_0 = (0, 0, \dots, 0).$$

Die akzeptierenden Zustände sind

$$F = \{(q_a, q_b, \dots, q_z) \in Q \mid \forall x \in \Sigma : q_x \neq 1\}.$$

Die Transitionsfunktion ist wie folgt definiert. Für

$$q = (q_a, q_b, \dots, q_z) \in Q, \qquad x \in \Sigma$$

ist

$$\delta(q, x) = q' = (q'_a, q'_b, \dots, q'_z),$$

wobei für alle $y \in \Sigma$ gilt:

$$q'_y = \begin{cases} q_y, & \text{falls } y \neq x, \\ 1, & \text{falls } y = x \text{ und } q_x = 0, \\ 2, & \text{falls } y = x \text{ und } q_x \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

Das heißt: Beim Lesen eines Zeichens x wird nur die Komponente q_x aktualisiert. Alle anderen Komponenten bleiben unverändert.

Der Automat akzeptiert genau dann, wenn am Ende kein Buchstabe genau einmal vorgekommen ist. Jeder Buchstabe kommt also entweder gar nicht oder mindestens zweimal vor.

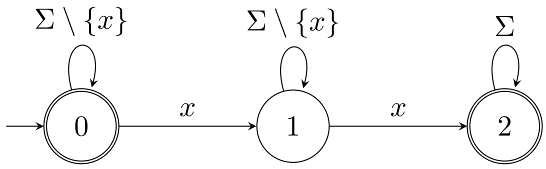
Da

$$|Q| = 3^{26}$$

endlich ist, ist $\mathcal{A}_2$ ein endlicher Automat. Somit ist L_2 regulär.

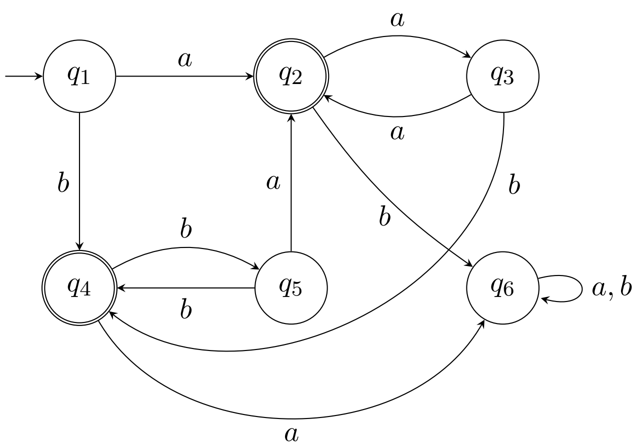
□

Bemerkung: Die gewählte Konstruktion entspricht der Produktautomatenkonstruktion über die Automaten $\mathcal{A}_a, \ldots, \mathcal{A}_z$, wobei $\mathcal{A}_x$ für ein $x \in \Sigma$ gegeben ist durch:

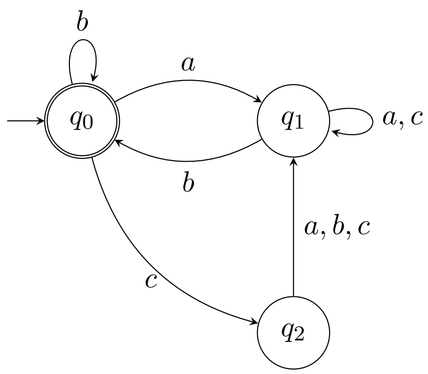


Aufgabe 3.3 (Minimale Automaten; 6 Punkte)
Beweisen Sie oder widerlegen Sie, dass die folgenden DEAs minimal sind.

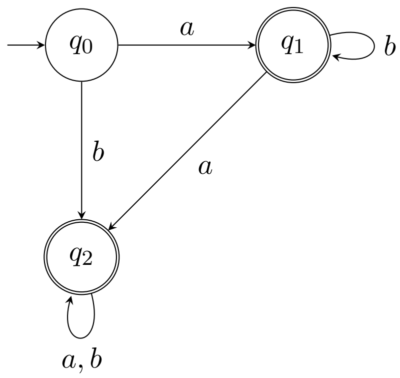
(a)



(b)



(c)



Lösung:

Wir erinnern uns: Ein DEA ist minimal genau dann, wenn alle Zustände erreichbar sind und keine zwei verschiedenen Zustände äquivalent sind.

Zwei Zustände $q, q' \in Q$ heißen äquivalent, geschrieben $q \equiv q'$, falls für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\tilde{\delta}(q, w) \in F \iff \tilde{\delta}(q', w) \in F.$$

(a) Der gegebene DEA ist **nicht minimal**.

Beweis:

Wir zeigen, dass q_1 und q_5 äquivalent sind. Wir beobachten, dass

$$q_1 \notin F \qquad \text{und} \qquad q_5 \notin F,$$

sowie

$$\delta(q_1, a) = q_2 = \delta(q_5, a)$$

und

$$\delta(q_1, b) = q_4 = \delta(q_5, b).$$

Sei nun $w \in \Sigma^*$. Falls $w = \varepsilon$, so gilt wegen $q_1, q_5 \notin F$:

$$\tilde{\delta}(q_1, \varepsilon) \in F \iff \tilde{\delta}(q_5, \varepsilon) \in F.$$

Sei nun $w \neq \varepsilon$. Dann hat w die Form aw' oder bw' mit $w' \in \Sigma^*$.

Für Wörter der Form aw' gilt:

$$\tilde{\delta}(q_1, aw') = \tilde{\delta}(\delta(q_1, a), w') = \tilde{\delta}(q_2, w')$$

und ebenso

$$\tilde{\delta}(q_5, aw') = \tilde{\delta}(\delta(q_5, a), w') = \tilde{\delta}(q_2, w').$$

Also gilt

$$\tilde{\delta}(q_1, aw') \in F \iff \tilde{\delta}(q_5, aw') \in F.$$

Für Wörter der Form bw' gilt:

$$\tilde{\delta}(q_1, bw') = \tilde{\delta}(\delta(q_1, b), w') = \tilde{\delta}(q_4, w')$$

und ebenso

$$\tilde{\delta}(q_5, bw') = \tilde{\delta}(\delta(q_5, b), w') = \tilde{\delta}(q_4, w').$$

Also gilt auch hier

$$\tilde{\delta}(q_1, bw') \in F \iff \tilde{\delta}(q_5, bw') \in F.$$

Damit gilt insgesamt für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\tilde{\delta}(q_1, w) \in F \iff \tilde{\delta}(q_5, w) \in F.$$

Also sind q_1 und q_5 äquivalent. Da $q_1 \neq q_5$, ist der DEA nicht minimal.

$\square$

(b) Der gegebene DEA ist **minimal**.

Beweis:

Zunächst sind alle Zustände erreichbar:

$$q_0 \text{ ist Startzustand}, \qquad q_0 \xrightarrow{a} q_1, \qquad q_0 \xrightarrow{c} q_2.$$

Nun zeigen wir, dass alle Zustände paarweise nicht äquivalent sind.

Zunächst beobachten wir:

$$q_0 \in F, \qquad q_1 \notin F, \qquad q_2 \notin F.$$

Daher unterscheidet das Wort ε den Zustand q_0 jeweils von q_1 und q_2. Also gilt:

$$q_0 \not\equiv q_1 \qquad \text{und} \qquad q_0 \not\equiv q_2.$$

Es bleibt zu zeigen, dass q_1 und q_2 nicht äquivalent sind. Das Wort b unterscheidet diese beiden Zustände, denn:

$$\delta(q_1, b) = q_0 \in F,$$

aber

$$\delta(q_2, b) = q_1 \notin F.$$

Also gilt:

$$q_1 \not\equiv q_2.$$

Damit sind alle Zustände erreichbar und paarweise nicht äquivalent. Also ist der DEA minimal.

□

(c) Der gegebene DEA ist **nicht minimal**.

Beweis:

Wir zeigen dazu, dass q_1 und q_2 äquivalent sind. Dazu zeigen wir per Induktion über w, dass

$$\tilde{\delta}(q_1, w) \in F \iff \tilde{\delta}(q_2, w) \in F.$$

IA: Sei $w = \varepsilon$. Dann gilt:

$$\tilde{\delta}(q_1, \varepsilon) = q_1 \in F \quad \text{und} \quad \tilde{\delta}(q_2, \varepsilon) = q_2 \in F.$$

Somit gilt:

$$\tilde{\delta}(q_1, \varepsilon) \in F \iff \tilde{\delta}(q_2, \varepsilon) \in F.$$

IV: Angenommen, für ein Wort $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\tilde{\delta}(q_1, w) \in F \iff \tilde{\delta}(q_2, w) \in F.$$

IS: Sei $x \in \{a, b\}$. Wir zeigen die Behauptung für xw.

Fall $x = a$: Dann gilt:

$$\delta(q_1, a) = q_2 \qquad \text{und} \qquad \delta(q_2, a) = q_2.$$

Also:

$$\tilde{\delta}(q_1, aw) = \tilde{\delta}(\delta(q_1, a), w) = \tilde{\delta}(q_2, w)$$

und

$$\tilde{\delta}(q_2, aw) = \tilde{\delta}(\delta(q_2, a), w) = \tilde{\delta}(q_2, w).$$

Damit gilt:

$$\tilde{\delta}(q_1, aw) \in F \iff \tilde{\delta}(q_2, aw) \in F.$$

Fall $x = b$: Dann gilt:

$$\delta(q_1, b) = q_1 \qquad \text{und} \qquad \delta(q_2, b) = q_2.$$

Also:

$$\tilde{\delta}(q_1, bw) = \tilde{\delta}(\delta(q_1, b), w) = \tilde{\delta}(q_1, w)$$

und

$$\tilde{\delta}(q_2, bw) = \tilde{\delta}(\delta(q_2, b), w) = \tilde{\delta}(q_2, w).$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt:

$$\tilde{\delta}(q_1, bw) \in F \iff \tilde{\delta}(q_2, bw) \in F.$$

Damit gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\tilde{\delta}(q_1, w) \in F \iff \tilde{\delta}(q_2, w) \in F.$$

Also sind q_1 und q_2 äquivalent. Da $q_1 \neq q_2$, ist der DEA nicht minimal.

$\square$

Aufgabe 3.4 (Erfahrungen; Datei: `NOTES.md`)

Notieren Sie Ihre Erfahrungen mit diesem Übungsblatt (benötigter Zeitaufwand, Probleme, Bezug zur Vorlesung, Interessantes, etc.).

Editieren Sie hierzu die Datei `NOTES.md` im Abgabeordner dieses Übungsblattes auf unserer Webplattform. Halten Sie sich an das dort vorgegebene Format, da wir den Zeitbedarf automatisch statistisch auswerten. Die Zeitangabe `4.5 h` steht dabei für 4 Stunden und 30 Minuten.