Theoretische Informatik

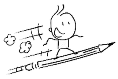
Prof. Dr. Peter Thiemann
Marius Weidner
Simon Dorer

Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2026

Übungsblatt 2 – Lösungen

Abgabe: Dienstag, 05.05.2026, 16:00 Uhr

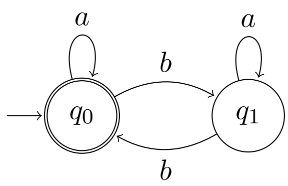
Hinweis: Ab diesem Übungsblatt annotieren wir Aufgaben, bei denen Sie einen Automaten in graphischer Darstellung angeben sollen mit *Mala Malstift*:



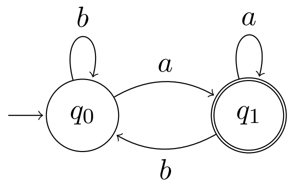
In allen anderen Aufgaben, wie z.B. formellen Beweisen, verwenden Sie die formelle Schreibweise als Tupel.

Aufgabe 2.1 (Produktautomat; 5 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden drei DEAs über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

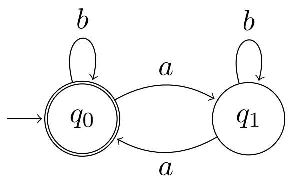
$\mathcal{A}_1$:



$\mathcal{A}_2$:



$\mathcal{A}_3$:

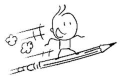


(a) Geben Sie die Sprachen $L(\mathcal{A}_1), L(\mathcal{A}_2)$ und $L(\mathcal{A}_3)$ in Mengenschreibweise an.

(b) Konstruieren Sie den Produktautomaten $\mathcal{A}_\cap$, der den Schnitt der Sprachen

$$L(\mathcal{A}_\cap) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) \cap L(\mathcal{A}_3)$$

akzeptiert. Verwenden Sie dabei *exakt* das Verfahren aus der Vorlesung!

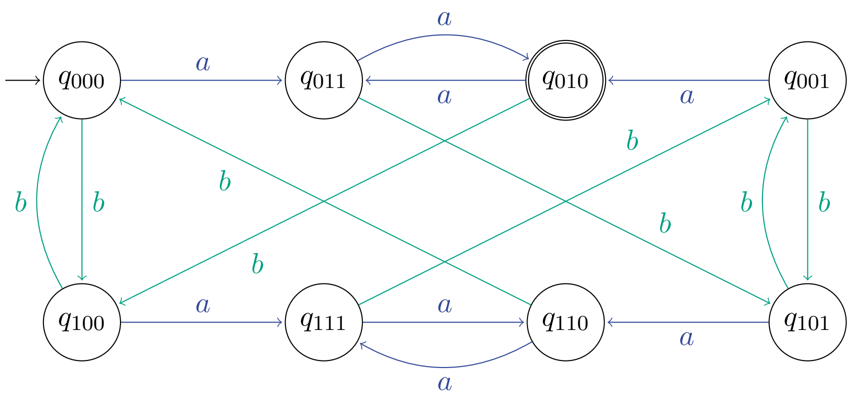


Lösung:

(a)
$$L(\mathcal{A}_1) = \{ w \in \Sigma^* \mid \#_b(w) \equiv 0 \pmod 2 \},$$
$$L(\mathcal{A}_2) = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : w = v \cdot a \},$$
$$L(\mathcal{A}_3) = \{ w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) \equiv 0 \pmod 2 \}.$$

Dabei beschreibt $\#_x(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens $x \in \Sigma$ in einem gegebenen Wort $w \in \Sigma^*$. Zum Beispiel gilt $\#_a(abab) = \#_b(abab) = 2$ und $\#_a(\epsilon) = 0$.

(b) Wir verwenden die Konstruktion aus der Vorlesung und verwenden die Kurzschreibweise q_{ijk} anstatt (q_i, q_j, q_k). Zur besseren Lesbarkeit haben wir die Kanten entsprechend des Übergangssymbols eingefärbt:



Aufgabe 2.2 (Komplementautomat; 5 Punkte)
Sei $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q^{\text{init}}, F)$ ein beliebiger DEA.

(a) Geben Sie eine Konstruktion für einen DEA $\overline{\mathcal{A}}$ an, dessen akzeptierte Sprache genau das Komplement von $L(\mathcal{A})$ ist, also
$$L(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{L(\mathcal{A})} = \Sigma^* \setminus L(\mathcal{A}).$$

(b) Beweisen Sie, dass Ihre Konstruktion korrekt ist, d.h. dass
$$L(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{L(\mathcal{A})}.$$

Lösung:

(a) Wir setzen
$$\overline{\mathcal{A}} = (\Sigma, \overline{Q}, \overline{q^{\text{init}}}, \overline{\delta}, \overline{F}),$$
wobei
$$\overline{Q} = Q,$$
$$\overline{q^{\text{init}}} = q^{\text{init}},$$
$$\overline{\delta} = \delta,$$
$$\overline{F} = Q \setminus F.$$

Wir erhalten also den Komplement-Automaten, indem wir alle akzeptierenden Zustände von $\mathcal{A}$ zu nicht akzeptierenden Zuständen machen und alle nicht akzeptierenden Zustände von $\mathcal{A}$ zu akzeptierenden Zuständen machen. Die Zustandsmenge Q, das Alphabet Σ, der Startzustand q^{init} und die Übergangsfunktion δ bleiben unverändert.

(b) Wir zeigen nun, dass

$$L(\overline{\mathcal{A}}) = \overline{L(\mathcal{A})}.$$

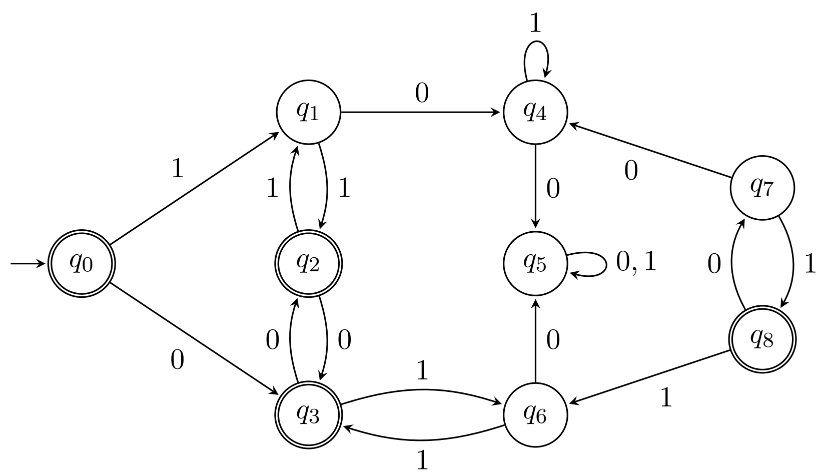
Wir beobachten zuerst, dass $\overline{\delta} = \delta$. Dadurch folgt direkt, dass $\tilde{\overline{\delta}}(q, w) = \tilde{\delta}(q, w)$ für alle $q \in Q = \overline{Q}$ und $w \in \Sigma^*$. (Formal kann dies auch per Induktion über w gezeigt werden!)

Sei nun $w \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \in L(\overline{\mathcal{A}}) &\iff \tilde{\overline{\delta}}(q^{\text{init}}, w) \in \overline{F} \\ &\iff \tilde{\delta}(q^{\text{init}}, w) \in Q \setminus F \\ &\iff w \notin L(\mathcal{A}) \\ &\iff w \in \overline{L(\mathcal{A})} \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 2.3 (Minimierung von DEAs; 5 Punkte)
Gegeben sei folgender DEA $\mathcal{A}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$:



Minimieren Sie $\mathcal{A}$ nach dem Verfahren aus der Vorlesung. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Geben Sie einen DEA $\mathcal{A}'$ an, der äquivalent zu $\mathcal{A}$ ist, jedoch keine unerreichbaren Zustände besitzt.

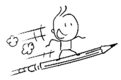
(b) Geben Sie die Äquivalenzklassen von $\equiv_{\mathcal{A}'}$ an. Verwenden Sie folgenden Algorithmus 1, der systematisch nicht-äquivalente Zustandspaare markiert, bis nur noch äquivalente Zustandspaare übrig bleiben.

Algorithm 1 Bestimmung äquivalenter Zustände

1: Initialisiere $\not\equiv_{\mathcal{A}'} = \emptyset$.
2: Für jedes Zustandspaar $(q_1, q_2) \in Q \times Q$, für das genau einer der beiden Zustände akzeptierend ist, also $q_1 \in F,\ q_2 \notin F$ oder $q_1 \notin F,\ q_2 \in F$, speichere $q_1 \not\equiv_{\mathcal{A}'} q_2$.
3: Für jedes Zustandspaar $(q_1, q_2) \in (Q \times Q) \setminus \not\equiv_{\mathcal{A}'}$, für das ein $a \in \Sigma$ existiert mit $\delta(q_1, a) \not\equiv_{\mathcal{A}'} \delta(q_2, a)$, speichere $q_1 \not\equiv_{\mathcal{A}'} q_2$.
4: Wiederhole Schritt 3 so lange, bis sich keine Änderungen mehr ergeben.
5: Setze $\equiv_{\mathcal{A}'} = (Q \times Q) \setminus \not\equiv_{\mathcal{A}'}$.

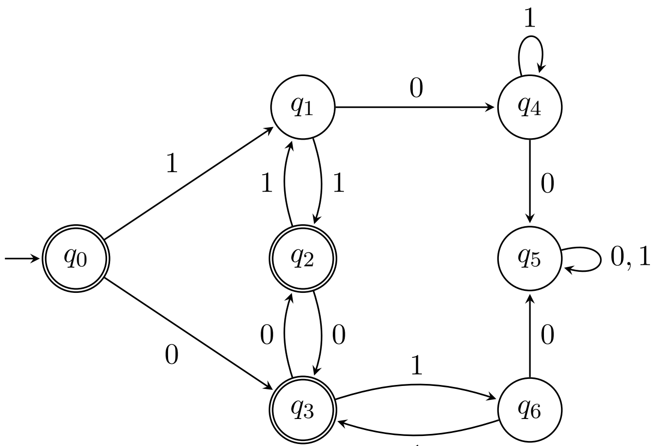
Verwenden Sie zum Speichern der Nicht-Äquivalenzen $\not\equiv_{\mathcal{A}'}$ eine Tabelle und geben Sie diese in Ihrer Abgabe an. Markieren Sie stets, welches Symbol $a \in \Sigma$ die Äquivalenz des jeweiligen Zustandspaars ausgeschlossen hat.

(c) Geben Sie den daraus resultierenden Äquivalenzklassenautomaten $\mathcal{A}_{\equiv}$ an, der die gleiche Sprache wie $\mathcal{A}$ erkennt.



Lösung:

(a) Die Zustände q_7 und q_8 sind von q_0 aus nicht erreichbar. Wir erhalten $\mathcal{A}'$, indem wir q_7 und q_8 entfernen:



(b) Zunächst markieren wir alle Zustandspaare, bei denen genau einer der beiden Zustände akzeptierend ist. Diese Markierungen sind in der Tabelle mit ϵ

gekennzeichnet. Alle weiteren Einträge geben das Symbol an, durch das die Nicht-Äquivalenz erkannt wird.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
q_0							
q_1	ϵ						
q_2		ϵ					
q_3		ϵ					
q_4	ϵ	1	ϵ	ϵ			
q_5	ϵ	1	ϵ	ϵ			
q_6	ϵ		ϵ	ϵ	1	1	

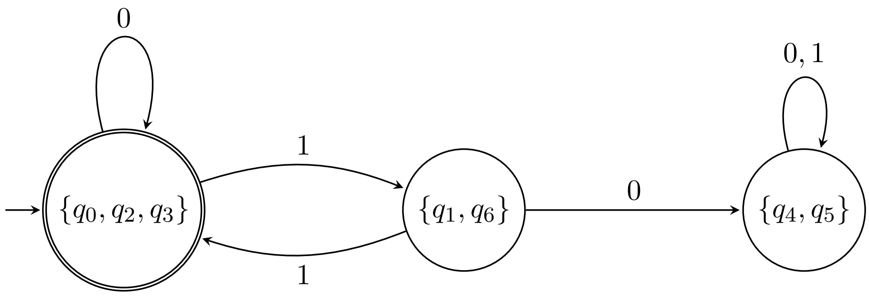
Die nicht markierten Zustandspaare sind

$$(q_0, q_2), \qquad (q_0, q_3), \qquad (q_2, q_3), \qquad (q_1, q_6), \qquad (q_4, q_5).$$

Daraus folgen die Äquivalenzklassen

$$\{q_0, q_2, q_3\}, \qquad \{q_1, q_6\}, \qquad \{q_4, q_5\}.$$

(c) $\mathcal{A}_\equiv$ ist somit gegeben durch:



Aufgabe 2.4 (Rechtskongruenz; 5 Punkte)
Gegeben sei ein beliebiger DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q^{\text{init}}, F)$.

Zeigen Sie, dass die Relation

$$R_\mathcal{A} = \{(u, v) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid \tilde{\delta}(q^{\text{init}}, u) = \tilde{\delta}(q^{\text{init}}, v)\}$$

rechtskongruent ist.

Lösung:
Wir zeigen, dass $R_\mathcal{A}$ rechtskongruent ist, also

$$(u, v) \in R_\mathcal{A} \implies \forall w \in \Sigma^* : (uw, vw) \in R_\mathcal{A}.$$

Dazu führen wir eine Induktion über w durch.

Seien also $u, v \in \Sigma^*$ mit $(u, v) \in R_{\mathcal{A}}$. Nach Definition von $R_{\mathcal{A}}$ gilt damit

$$\tilde{\delta}(q^{\text{init}}, u) = \tilde{\delta}(q^{\text{init}}, v).$$

IA: Für $w = \varepsilon$ gilt

$$(uw, vw) = (u\varepsilon, v\varepsilon) = (u, v) \in R_{\mathcal{A}}.$$

IV: Sei $w \in \Sigma^*$ beliebig, aber fest, und es gelte

$$(uw, vw) \in R_{\mathcal{A}}.$$

IS: Sei nun $a \in \Sigma$. Wir zeigen, dass

$$(uwa, vwa) \in R_{\mathcal{A}}$$

gilt.

Bemerkung: *Obwohl im Skript Σ^* induktiv durch $w \in \Sigma^* \Rightarrow aw \in \Sigma^*$ definiert wird, verwenden wir hier die äquivalente rekursive Definition mit $w \in \Sigma^* \Rightarrow wa \in \Sigma^*$. Beide Definitionen erzeugen dieselbe Menge aller endlichen Wörter über Σ und sind daher isomorph; insbesondere ist eine Induktion über die Wortlänge in beiden Varianten gültig.*

Wir beobachten zunächst, dass aus der IV nach Definition von $R_{\mathcal{A}}$ folgt, dass

$$\tilde{\delta}(q^{\text{init}}, uw) = \tilde{\delta}(q^{\text{init}}, vw).$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(q^{\text{init}}, uwa) &= \delta(\tilde{\delta}(q^{\text{init}}, uw), a) \\ &\overset{IV}{=} \delta(\tilde{\delta}(q^{\text{init}}, vw), a) \\ &= \tilde{\delta}(q^{\text{init}}, vwa). \end{aligned}$$

Also gilt $(uwa, vwa) \in R_{\mathcal{A}}$.

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt.

$\square$

Aufgabe 2.5 (Erfahrungen; Datei: `NOTES.md`)

Notieren Sie Ihre Erfahrungen mit diesem Übungsblatt (benötigter Zeitaufwand, Probleme, Bezug zur Vorlesung, Interessantes, etc.).

Editieren Sie hierzu die Datei `NOTES.md` im Abgabeordner dieses Übungsblattes auf unserer Webplattform. Halten Sie sich an das dort vorgegebene Format, da wir den Zeitbedarf automatisch statistisch auswerten. Die Zeitangabe `4.5 h` steht dabei für 4 Stunden und 30 Minuten.