Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Thiemann
Marius Weidner
Simon Dorer

Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2026

Übungsblatt 1 – Lösungen

Abgabe: Dienstag, 28.04.2026, 16:00 Uhr

Wichtig:
Bevor Sie mit den Aufgaben beginnen, melden Sie sich bitte **jetzt** für ein Tutorat auf HisInOne an.

Aufgabe 1.1 (Warm-up; 4 Punkte)
Gegeben sei die Sprache
$$L = \{aa, \varepsilon, b\}$$
über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Bestimmen Sie explizit die folgenden Sprachen:

(a) L^2

(b) $\emptyset \cdot L$

(c) $L \cdot \{\varepsilon\}$

(d) $\{\varepsilon\} \cdot \emptyset$

Lösung:
Wir verwenden die Definition der Konkatenation zweier Sprachen U und V aus der Vorlesung:
$$UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$$

(a) $L^2 = L \cdot L = \{aaaa, aa, aab, \varepsilon, b, baa, bb\}$

(b) $\emptyset \cdot L = \emptyset$

(c) $L \cdot \{\varepsilon\} = L = \{aa, \varepsilon, b\}$

(d) $\{\varepsilon\} \cdot \emptyset = \emptyset$

Aufgabe 1.2 (Beweise über Sprachen; 4 Punkte)
Es seien Σ ein endliches Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine endliche Sprache.

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Beweisen Sie wahre Aussagen und widerlegen Sie falsche Aussagen.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$|L^n| = |L|^n.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$|\Sigma^n| = |\Sigma|^n.$$

Lösung:

Wir erinnern uns an die induktive Definition der Potenzierung einer Sprache L:
$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{falls } n = 0, \\ L \cdot L^{n-1} & \text{falls } n > 0. \end{cases}$$

(a) Die Aussage ist **falsch**. Wir widerlegen die Aussage durch ein Gegenbeispiel:

Sei
$$\Sigma = \{a\} \qquad \text{und} \qquad L = \{\varepsilon, a\}.$$
Dann gilt $|L| = 2$. Für $n = 2$ ist
$$L^2 = L \cdot L = \{\varepsilon\varepsilon, \varepsilon a, a\varepsilon, aa\} = \{\varepsilon, a, aa\}.$$
Also
$$|L^2| = 3 \neq 4 = |L|^2.$$

$\square$

(b) Die Aussage ist **wahr**. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n. Wir zeigen also für alle $n \in \mathbb{N}$, dass
$$|\Sigma^n| = |\Sigma|^n.$$

IA) Für $n = 0$ gilt
$$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}.$$
Daher ist
$$|\Sigma^0| = 1.$$
Andererseits gilt auch
$$|\Sigma|^0 = 1.$$
Also folgt
$$|\Sigma^0| = |\Sigma|^0.$$

IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen, es gilt
$$|\Sigma^n| = |\Sigma|^n.$$

IS) Wir zeigen
$$|\Sigma^{n+1}| = |\Sigma|^{n+1}.$$

Jedes Wort in Σ^{n+1} besteht aus einem Wort der Länge n und einem zusätzlichen Zeichen aus Σ. Also gilt
$$\Sigma^{n+1} = \Sigma^n \cdot \Sigma.$$

Zu jedem Wort aus Σ^n gibt es genau $|\Sigma|$ Möglichkeiten, ein weiteres Zeichen anzuhängen. Daher folgt

$$|\Sigma^{n+1}| = |\Sigma^n| \cdot |\Sigma|.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$|\Sigma^{n+1}| = |\Sigma|^n \cdot |\Sigma| = |\Sigma|^{n+1}.$$

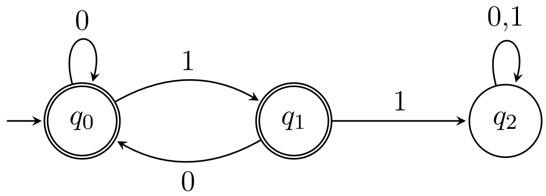
Damit ist der Induktionsschritt gezeigt.

□

Aufgabe 1.3 (Deterministische endliche Automaten; 6 Punkte)

(a) Geben Sie einen DEA $\mathcal{A}_1$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$ an, sodass die von ihm akzeptierte Sprache $L(\mathcal{A}_1)$ genau aus den Binärdarstellungen ungerader natürlicher Zahlen besteht. Dabei lesen wir Bitstrings von links nach rechts, das heißt: Das linke Bit ist das höchstwertige Bit, das rechte Bit das niederwertigste Bit. Außerdem interpretieren wir den leeren Bitstring ε als die Zahl 0.

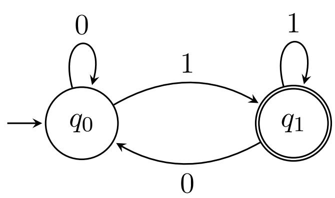
(b) Gegeben sei der folgende DEA $\mathcal{A}_2$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0,1\}$:



1. Berechnen Sie $\tilde{\delta}(q_0, 101)$ und $\tilde{\delta}(q_0, 0110)$.
2. Beschreiben Sie $L(\mathcal{A}_2)$ in Worten.
3. Geben Sie eine formale Definition von $L(\mathcal{A}_2)$ in Mengenschreibweise an.

Lösung:

(a) Z.B. kann $\mathcal{A}_1$ wie folgt definiert werden:



(b) 1. Wir berechnen die Zustände schrittweise:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(q_0, 101) &= \tilde{\delta}(\delta(q_0, 1), 01) = \tilde{\delta}(q_1, 01)\\ &= \tilde{\delta}(\delta(q_1, 0), 1) = \tilde{\delta}(q_0, 1)\\ &= \delta(q_0, 1) = q_1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}(q_0, 0110) &= \tilde{\delta}(\delta(q_0, 0), 110) = \tilde{\delta}(q_0, 110)\\ &= \tilde{\delta}(\delta(q_0, 1), 10) = \tilde{\delta}(q_1, 10)\\ &= \tilde{\delta}(\delta(q_1, 1), 0) = \tilde{\delta}(q_2, 0)\\ &= \delta(q_2, 0) = q_2\end{aligned}$$

2. Die Sprache $L(\mathcal{A}_2)$ besteht genau aus allen Wörtern über $\{0, 1\}$, in denen keine zwei Einsen direkt hintereinander vorkommen.
3. Formal in Mengenschreibweise:

$$L(\mathcal{A}_2) = \{\, w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort 11 nicht} \,\}.$$

Äquivalent dazu kann man auch schreiben:

$$L(\mathcal{A}_2) = \{\, w \in \{0, 1\}^* \mid \forall x, y \in \{0, 1\}^* :\ w \neq x11y \,\}.$$

Aufgabe 1.4 (Sprachen als Monoid; 6 Punkte)
Sprachen bilden unter Konkatenation ein Monoid. D. h. es gibt ein neutrales Element e, und die Konkatenation von Sprachen ist assoziativ.

(a) Geben Sie das neutrale Element e für die Konkatenation von Sprachen an.

(b) Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie für das von Ihnen gewählte e, dass $L \cdot e = e \cdot L = L$ gilt.

(c) Seien $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$. Beweisen Sie, dass $(L_1L_2)L_3 = L_1(L_2L_3)$.

Lösung:

(a) Das neutrale Element ist

$$e = \{\varepsilon\}.$$

(b) Wir zeigen

$$L \cdot e = L \quad \text{und} \quad e \cdot L = L.$$

Nach Definition der Konkatenation von Sprachen gilt

$$L \cdot e = \{uv \mid u \in L,\ v \in e\}.$$

Da $e = \{\varepsilon\}$, ist $v = \varepsilon$, also

$$L \cdot e = \{u\varepsilon \mid u \in L\} = \{u \mid u \in L\} = L.$$

Analog gilt

$$e \cdot L = \{uv \mid u \in e,\ v \in L\}.$$

Wegen $u = \varepsilon$ folgt

$$e \cdot L = \{\varepsilon v \mid v \in L\} = \{v \mid v \in L\} = L.$$

Insgesamt also

$$L \cdot e = e \cdot L = L.$$

□

(c) **Behauptung:** Für alle $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ gilt

$$(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3).$$

Beweis: Wir zeigen beide Inklusionen.

„$\subseteq$“: Sei $x \in (L_1 L_2) L_3$. Dann gibt es ein Wort $y \in L_1 L_2$ und ein Wort $z \in L_3$ mit

$$x = yz.$$

Da $y \in L_1 L_2$, gibt es Wörter $u \in L_1$ und $v \in L_2$ mit

$$y = uv.$$

Also

$$x = yz = (uv)z.$$

Da die Konkatenation von Wörtern assoziativ ist, gilt

$$(uv)z = u(vz).$$

Wegen $v \in L_2$ und $z \in L_3$ ist $vz \in L_2 L_3$. Mit $u \in L_1$ folgt

$$x = u(vz) \in L_1 (L_2 L_3).$$

Also

$$(L_1 L_2) L_3 \subseteq L_1 (L_2 L_3).$$

„$\supseteq$“: Sei $x \in L_1 (L_2 L_3)$. Dann gibt es ein Wort $u \in L_1$ und ein Wort $y \in L_2 L_3$ mit

$$x = uy.$$

Da $y \in L_2 L_3$, gibt es Wörter $v \in L_2$ und $z \in L_3$ mit

$$y = vz.$$

Also

$$x = u(vz).$$

Wegen der Assoziativität der Wortkonkatenation gilt

$$u(vz) = (uv)z.$$

Da $u \in L_1$ und $v \in L_2$, ist $uv \in L_1L_2$. Mit $z \in L_3$ folgt

$$x = (uv)z \in (L_1L_2)L_3.$$

Also

$$L_1(L_2L_3) \subseteq (L_1L_2)L_3.$$

Insgesamt folgt

$$(L_1L_2)L_3 = L_1(L_2L_3).$$

□

Aufgabe 1.5 (*Bonusaufgabe*, 3 Punkte)
In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie Σ^* auf zwei Arten definiert werden kann:

Einerseits induktiv durch

$$\varepsilon \in \Sigma_I^* \qquad \text{und} \qquad a \in \Sigma,\ w \in \Sigma_I^* \Longrightarrow a.w \in \Sigma_I^*,$$

andererseits als Funktionen fester Länge mit

$$\Sigma_F^n = \{1, \dots, n\} \to \Sigma \qquad \text{und} \qquad \Sigma_F^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_F^n.$$

Um zu zeigen, dass beide Darstellungen isomorph zueinander sind, müssen wir zeigen, dass eine bijektive Abbildung Φ von Wörtern aus der induktiven Darstellung zu Wörtern aus der Darstellung als Funktionen fester Länge existiert:

$$\Phi : \Sigma_I^* \to \Sigma_F^*$$

(a) Definieren Sie eine geeignete Funktion Φ.

(b) Zeigen Sie, dass Φ injektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist.

Lösung:
Wir definieren eine Abbildung

$$\Phi : \Sigma_I^* \to \Sigma_F^*$$

rekursiv über den Aufbau der Wörter.

(a) Für $w = \varepsilon$ definieren wir

$$\Phi(\varepsilon) = (),$$

wobei () die leere Funktion

$$() : \emptyset \to \Sigma$$

ist.

Für $a.w \neq \varepsilon$ mit $a \in \Sigma$ und $w \in \Sigma_I^*$ definieren wir $\Phi(a.w) = f$, wobei

$$f : \{1, \dots, |w| + 1\} \to \Sigma$$

gegeben ist durch

$$f(i) = \begin{cases} a, & i = 1, \\ \Phi(w)(i-1), & 2 \leq i \leq |w| + 1. \end{cases}$$

Also wird das erste Zeichen a an die erste Stelle geschrieben, und der Rest des Wortes wird um eine Stelle verschoben.

Insbesondere, ist die Konstruktion wohldefiniert, da sie für jede mögliche Eingabe $w \in \Sigma_I^*$ terminiert.

(b) Wir zeigen, dass Φ injektiv ist.

Dazu zeigen wir die Kontraposition. Seien $w_1, w_2 \in \Sigma_I^*$ mit

$$w_1 \neq w_2.$$

Wir zeigen

$$\Phi(w_1) \neq \Phi(w_2).$$

Falls

$$|w_1| \neq |w_2|,$$

dann haben $\Phi(w_1)$ und $\Phi(w_2)$ verschiedene Definitionsbereiche, nämlich

$$\{1, \dots, |w_1|\} \qquad \text{und} \qquad \{1, \dots, |w_2|\}.$$

Also gilt direkt

$$\Phi(w_1) \neq \Phi(w_2).$$

Sei also nun

$$|w_1| = |w_2|.$$

Da $w_1 \neq w_2$, gibt es eine Stelle $i \in \{1, \dots, |w_1|\}$, an der sich die beiden Wörter unterscheiden. Also gilt

$$w_1(i) \neq w_2(i).$$

Nach Definition von Φ steht an der Stelle i genau das i-te Zeichen des jeweiligen Wortes. Daher gilt

$$\Phi(w_1)(i) \neq \Phi(w_2)(i).$$

Also sind die Funktionen verschieden:

$$\Phi(w_1) \neq \Phi(w_2).$$

Damit haben wir gezeigt:

$$w_1 \neq w_2 \Longrightarrow \Phi(w_1) \neq \Phi(w_2).$$

Also ist Φ injektiv.

$\square$

(c) Wir zeigen, dass Φ surjektiv ist.

Sei $f \in \Sigma_F^*$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f : \{1, \ldots, n\} \to \Sigma.$$

Wir zeigen per Induktion über n, dass es für jede Funktion

$$f : \{1, \ldots, n\} \to \Sigma$$

ein Wort $w \in \Sigma_I^*$ gibt mit

$$\Phi(w) = f.$$

IA) Für $n = 0$ ist f die leere Funktion. Dann wählen wir

$$w = \varepsilon.$$

Es gilt

$$\Phi(\varepsilon) = () = f.$$

IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Wir nehmen an, dass für jede Funktion

$$g : \{1, \ldots, n-1\} \to \Sigma$$

ein Wort $w \in \Sigma_I^*$ existiert mit

$$\Phi(w) = g.$$

IS) Sei nun $n > 0$. Wir zeigen die Behauptung für eine beliebige Funktion

$$f : \{1, \ldots, n\} \to \Sigma.$$

Setze

$$a := f(1).$$

Definiere außerdem die Funktion

$$g : \{1, \ldots, n-1\} \to \Sigma$$

durch

$$g(i) := f(i+1).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Wort $w \in \Sigma_I^*$ mit

$$\Phi(w) = g.$$

Dann betrachten wir das Wort

$$a.w \in \Sigma_I^*.$$

Für dieses gilt

$$\Phi(a.w)(1) = a = f(1),$$

und für $2 \leq i \leq n$ gilt

$$\Phi(a.w)(i) = \Phi(w)(i-1) = g(i-1) = f(i).$$

Also gilt

$$\Phi(a.w) = f.$$

Damit ist Φ surjektiv.

$\square$

Somit ist Φ injektiv und surjektiv, also bijektiv. Daher sind die induktive Darstellung Σ_I^* und die Darstellung als Funktionen fester Länge Σ_F^* isomorph.

Aufgabe 1.6 (Erfahrungen; Datei: `NOTES.md`)

Notieren Sie Ihre Erfahrungen mit diesem Übungsblatt (benötigter Zeitaufwand, Probleme, Bezug zur Vorlesung, Interessantes, etc.).

Editieren Sie hierzu die Datei `NOTES.md` im Abgabeordner dieses Übungsblattes auf unserer Webplattform. Halten Sie sich an das dort vorgegebene Format, da wir den Zeitbedarf automatisch statistisch auswerten. Die Zeitangabe `4.5 h` steht dabei für 4 Stunden und 30 Minuten.