

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Thiemann
Marius Weidner
Simon Dorer

Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2026

Übungsblatt 9

Abgabe: Dienstag, 30.06.2026, 16:00 Uhr

Hinweis:

Die Aufgabenstellungen in Aufgabe 1 und Aufgabe 2 wurden nachträglich präzisiert.
Die geänderten Aufgabentexte sind blau hervorgehoben.

Aufgabe 9.1 (Fallunterscheidungen; 8 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind. Geben Sie dazu jeweils einen Term in PREC an und begründen Sie, warum dessen Semantik die angegebene Funktion ist.

(a) $\text{iszero} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

(b) $\chi_{=} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

(c) $\text{ite} : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$(c, x, y) \mapsto \begin{cases} x, & c > 0, \\ y, & c = 0. \end{cases}$$

Die Funktion `ite` kann dabei als äquivalent zu `if c then x else y` verstanden werden.

(d) Nutzen Sie die beiden Funktionen aus den Aufgabenteilen b) und c) sowie die Beispiele aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass wir eine primitiv rekursive Funktion $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ angeben können, die die beiden Eingaben addiert, falls sie gleich sind und multipliziert, falls nicht.

Aufgabe 9.2 (Primitive rekursive Funktionen; 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Funktionen primitiv rekursiv sind. Geben Sie dazu jeweils einen Term in PREC an und begründen Sie, warum dessen Semantik die angegebene Funktion ist:

(a) $\text{fac} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n!$

- (b) Für ein festes $m \in \mathbb{N}$ mit $m > 0$ die Funktion

$$\text{mod}_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad n \mapsto n \bmod m.$$

Überlegen Sie sich, wie Sie die Funktion als primitive Rekursion mit Fallunterscheidung definieren können.

Aufgabe 9.3 (Beschränkte Summen primitiv rekursiver Funktionen; 6 Punkte)

- (a) Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass

$$g(x_1, \dots, x_k, n) = \sum_{i=1}^n f(x_1, \dots, x_k, i)$$

auch primitiv rekursiv ist.

- (b) Schließen Sie aus Aufgabenteil a), mod_5 aus Aufgabe 2b), sowie χ_5 aus Aufgabe 1b), dass die Funktion

$$n \mapsto \text{Anzahl der durch 5 teilbaren Zahlen in } \{1, \dots, n\}$$

primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 9.4 (Erfahrungen; Datei: NOTES.md)

Notieren Sie Ihre Erfahrungen mit diesem Übungsblatt (benötigter Zeitaufwand, Probleme, Bezug zur Vorlesung, Interessantes, etc.).

Editieren Sie hierzu die Datei `NOTES.md` im Abgabeordner dieses Übungsblattes auf unserer Webplattform. Halten Sie sich an das dort vorgegebene Format, da wir den Zeitbedarf automatisch statistisch auswerten. Die Zeitangabe **4.5 h** steht dabei für 4 Stunden und 30 Minuten.