

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Thiemann
Marius Weidner
Simon Dorer

Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2026

Übungsblatt 8

Abgabe: Dienstag, 23.06.2026, 16:00 Uhr

Aufgabe 8.1 (Pumping Lemma über einelementigem Alphabet; 5 Punkte)

Sei L eine Sprache über $\Sigma = \{a\}$. Angenommen, es gibt einen Beweis mit dem Pumping Lemma für reguläre Sprachen (PLR), der beweist, dass L nicht regulär ist.

Zeigen Sie mit dem Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen (PLK), dass L auch nicht kontextfrei ist.

Aufgabe 8.2 (Kellerautomaten; 5 Punkte)

Konstruieren Sie für jede der folgenden Sprachen einen NPDA, der genau diese Sprache erkennt.

Erklären Sie dabei *kurz*, welche Information auf dem Keller gespeichert wird und warum der Automat genau die angegebene Sprache erkennt.

- (a) $L_1 = \{a^n b^m \mid m \leq n \leq 2m\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



- (b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist ein korrekt geklammerter Ausdruck}\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{\langle, \rangle, [,]\}$ (das Alphabet der öffnenden und schließenden spitzen und eckigen Klammern). Zum Beispiel gilt $\varepsilon \in L_2$ und $\langle [] \rangle [] \in L_2$, aber $\langle \rangle \notin L_2$ und $\langle [] \rangle \notin L_2$. Ihr NPDA für L_2 soll dabei eine **minimale Anzahl an Zuständen** haben.



Hinweis: Aus der graphischen Darstellung von Kellerautomaten geht nicht direkt hervor, welches Kellersymbol als Kellerbodensymbol verwendet werden soll. Geben Sie ihr gewähltes Symbol also explizit an, um einen vollständig definierten Kellerautomaten zu erhalten.

Aufgabe 8.3 (Kontextinvarianz der Schrittrelation; 5 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass es zu jeder CFG $\mathcal{G}$ ein äquivalenter NPDA $\mathcal{K}$ existiert, der dieselbe Sprache erkennt. Hierbei haben wir folgendes Lemma verwendet:

Lemma. Für alle $q, q' \in Q$, $w \in \Sigma^*$, $Z \in \Gamma$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Wenn $(q, w, Z) \triangleright^n (q', \varepsilon, \varepsilon)$, dann $\forall v \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^* : (q, wv, Z\gamma) \triangleright^n (q', v, \gamma)$.

Zeigen Sie, dass das Lemma korrekt ist.

Aufgabe 8.4 (Kellerautomaten mit akzeptierenden Zuständen; 5 Punkte)

In der Vorlesung haben wir die Akzeptanz eines Kellerautomaten $\mathcal{K}$ über den leeren Keller wie folgt definiert:

$$w \in L(\mathcal{K}) \iff \exists q \in Q : (q^{\text{init}}, w, Z^{\text{init}}) \triangleright^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Alternativ dazu können wir die Akzeptanz von Kellerautomaten über akzeptierende Zustände definieren. Ein acc-NPDA ist ein 7-Tupel

$$\mathcal{K}_{\text{acc}} = (\Sigma, Q, \Gamma, q^{\text{init}}, Z^{\text{init}}, \delta, F)$$

mit $F \subseteq Q$. Für einen solchen Automaten gilt:

$$w \in L(\mathcal{K}_{\text{acc}}) \iff \exists q_f \in F, \gamma \in \Gamma^* : (q^{\text{init}}, w, Z^{\text{init}}) \triangleright^* (q_f, \varepsilon, \gamma).$$

Beide Akzeptanzarten beschreiben dieselbe Klasse von Sprachen. In dieser Aufgabe sollen Sie diese Äquivalenz zeigen, indem Sie Konstruktionen in beide Richtungen angeben.

- (a) Sei $\mathcal{K}$ ein NPDA. Konstruieren Sie einen acc-NPDA $\mathcal{K}_{\text{acc}}$ mit $L(\mathcal{K}) = L(\mathcal{K}_{\text{acc}})$.
- (b) Sei $\mathcal{K}_{\text{acc}}$ ein acc-NPDA. Konstruieren Sie einen NPDA $\mathcal{K}$ mit $L(\mathcal{K}) = L(\mathcal{K}_{\text{acc}})$.

Hinweis: Es genügt, die jeweilige Konstruktion anzugeben. Sie müssen *nicht* formal beweisen, dass die Konstruktionen korrekt sind.