Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Thiemann
Marius Weidner
Simon Dorer

Universität Freiburg
Institut für Informatik
Sommersemester 2026

Übungsblatt 6

Abgabe: Dienstag, 11.06.2026, 16:00 Uhr

Hinweis:
In diesem Übungsblatt fassen wir mehrere Produktionsregeln mit derselben linken Seite verkürzt zusammen. Statt

$$\begin{aligned} A &\to \alpha_1 \\ A &\to \alpha_2 \\ &\vdots \\ A &\to \alpha_n \end{aligned}$$

schreiben wir kurz $A \to \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_n$.

Aufgabe 6.1 (Grammatiken; 5 Punkte)
Konstruieren Sie für jede der folgenden Sprachen eine Grammatik über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Erklären Sie dabei *kurz*, warum Ihre Grammatik genau die angegebene Sprache erzeugt.

(a) Geben Sie eine *reguläre* Grammatik $\mathcal{G}_{\text{reg}}$ an, sodass

$$L(\mathcal{G}_{\text{reg}}) = \{\, w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält nicht das Teilwort } aa \,\}.$$

(b) Geben Sie eine *kontextfreie* Grammatik $\mathcal{G}_{\text{cf}}$ an, sodass

$$L(\mathcal{G}_{\text{cf}}) = \{\, a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N} \,\}.$$

Aufgabe 6.2 (Grammatiken und starke Induktion; 5 Punkte)
Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{0, 1\}, \\ N &= \{S\}, \\ P &= \{S \to 1S0S \mid 0S1S \mid \varepsilon\} \end{aligned}$$

und eine Sprache $L = \{\, w \in \Sigma^* \mid \#_0(w) = \#_1(w) \,\}$, wobei $\#_a(w)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens $a \in \Sigma$ im Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichnet.

Zeigen Sie mittels *starker Induktion*[1] über der Länge $|w|$ eines Wortes $w \in L$, dass

$$L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{G}).$$

[1] Bei starker Induktion, wird in der Induktionsvoraussetzung angenommen, dass die Aussage für *alle* $n' < n$ gilt. Siehe hierzu https://de.wikipedia.org/wiki/VollstÃďndige_Induktion#Starke_Induktion.

Verwenden Sie dabei die Hilfsfunktion $d\colon \Sigma^* \to \mathbb{Z}$ mit

$$d(\varepsilon) = 0, \qquad d(1w) = d(w) + 1, \qquad d(0w) = d(w) - 1$$

für alle $w \in \Sigma^*$, sowie die Eigenschaften

$$u \in L \iff d(u) = 0 \qquad \text{und} \qquad d(uv) = d(u) + d(v)$$

für alle $u, v \in \Sigma^*$.

Aufgabe 6.3 (Ableitungsbäume; 5 Punkte)
Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \{x, y, +\},\\
N &= \{S\},\\
P &= \{S \to S + S \mid x \mid y\}
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}$ nicht eindeutig ist.

(b) Geben Sie eine eindeutige Grammatik $\mathcal{G}'$ an mit $L(\mathcal{G}') = L(\mathcal{G})$. Begründen Sie *kurz* warum Ihre Grammatik eindeutig ist und die gewünschte Sprache erzeugt.

Aufgabe 6.4 (Sep und Bin; 5 Punkte)
Betrachten Sie die Grammatik $\mathcal{G} = (\Sigma, N, P, S)$ mit

$$\Sigma = \{a, b, c\}, \quad N = \{S, A, B, C, D\} \quad \text{und}$$

$$P = \left\{\begin{array}{l}
S \to aBCb \mid ABc \mid D,\\
A \to BaC \mid b,\\
B \to Cb \mid \varepsilon,\\
C \to cSA \mid aD,\\
D \to AC \mid c
\end{array}\right\}$$

(a) Wenden Sie den Algorithmus Sep aus der Vorlesung auf $\mathcal{G}$ an.

(b) Wenden Sie anschließend den Algorithmus Bin auf die in Teil (a) erhaltene Grammatik an. Führen Sie neue Nichtterminale systematisch ein und geben Sie die resultierende Grammatik vollständig an.

Aufgabe 6.5 (Erfahrungen; Datei: `NOTES.md`)
Notieren Sie Ihre Erfahrungen mit diesem Übungsblatt (benötigter Zeitaufwand, Probleme, Bezug zur Vorlesung, Interessantes, etc.).

Editieren Sie hierzu die Datei `NOTES.md` im Abgabeordner dieses Übungsblattes auf unserer Webplattform. Halten Sie sich an das dort vorgegebene Format, da wir den Zeitbedarf automatisch statistisch auswerten. Die Zeitangabe `4.5 h` steht dabei für 4 Stunden und 30 Minuten.