Informatik I: Einführung in die Programmierung

15. Rekursion, Endrekursion, Iteration

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Prof. Dr. Peter Thiemann

7. Januar 2026

Rekursion

Rekursive Funktionen

Definition

Eine Funktion f ist **rekursiv**, wenn der Funktionsrumpf einen Aufruf von f enthält.

Rekursive Funktionen

Definition

Eine Funktion *f* ist **rekursiv**, wenn der Funktionsrumpf einen Aufruf von *f* enthält.

Beispiel (Fibonacci, naiv)

```
def fib (n : int) -> int:
    if n < 2:
        return 1
    else:
        return fib (n-2) + fib (n-1)
```

Rekursive Funktionen

Definition

Eine Funktion *f* ist **rekursiv**, wenn der Funktionsrumpf einen Aufruf von *f* enthält.

Beispiel (Fibonacci, naiv)

```
def fib (n : int) -> int:
    if n < 2:
        return 1
    else:
        return fib (n-2) + fib (n-1)
```

- Problem: Termination (vgl. while Schleife)

Rekursive Funktionen

Definition

Eine Funktion *f* ist **rekursiv**, wenn der Funktionsrumpf einen Aufruf von *f* enthält.

Beispiel (Fibonacci, naiv)

```
def fib (n : int) -> int:
    if n < 2:
        return 1
    else:
        return fib (n-2) + fib (n-1)
```

- Problem: Termination (vgl. while Schleife)
- Bekannt von Funktionen auf Bäumen: rekursive Aufrufe nur auf Teilbaum ⇒ Termination.

Rekursive Funktionen

Definition

Eine Funktion *f* ist **rekursiv**, wenn der Funktionsrumpf einen Aufruf von *f* enthält.

Beispiel (Fibonacci, naiv)

```
def fib (n : int) -> int:
    if n < 2:
        return 1
    else:
        return fib (n-2) + fib (n-1)
```

- Problem: Termination (vgl. while Schleife)
- Bekannt von Funktionen auf Bäumen: rekursive Aufrufe nur auf Teilbaum ⇒ Termination.
- Allgemein müssen die Argumente eines rekursiven Aufrufs “kleiner” sein als die Argumente der Funktion ⇒ Termination.

Rekursion und Bäume

Erinnerung

- Bäume sind induktiv definiert:
  - Ein Baum ist entweder leer □ oder
  - ein Knoten mit einer Markierung und einer Liste von Teilbäumen.

Rekursion und Bäume

Erinnerung

- Bäume sind induktiv definiert:
  - Ein Baum ist entweder leer $\Box$ oder
  - ein Knoten mit einer Markierung und einer Liste von Teilbäumen.
- Schema für Funktionen F auf Bäumen, die natürlich rekursiv sind:
  - $F(\Box) = A$
  - $F\left(\begin{array}{ccc} & \text{mark} & \\ t_0 & \dots & t_{n-1} \end{array}\right) = B(\text{mark}, F(t_0), \dots, F(t_{n-1}))$
  - B ist ein Programmstück, das die Markierung der Wurzel, sowie die Ergebnisse der Funktionsaufrufe von F auf den Teilbäumen verwenden darf.

```
@dataclass
class Node:
    mark : Any
    children : list['Tree']
type Tree = Optional[Node]
def tree_skeleton (tree : Tree) -> Any:
    match tree:
        case None:
            return "A" # result for empty tree
        case Node (mark, children):
            # compute B from
            # - mark
            # - tree_skeleton(children[0])
            # - ...
            # - tree_skeleton(children[n-1])
            #   where n = len (childen)
            return "B"
```

Binäre Suche

Jede Rekursion folgt einer Baumstruktur

Binäre Suche — Spezifikation

- Eingabe
  - `lst : list[T]` streng aufsteigend sortierte Liste
  - `key : T` Suchbegriff
- Ausgabe
  - `i` sodass `lst[i] == key`, falls `key in lst`
  - andernfalls: `None`

Jede Rekursion folgt einer Baumstruktur

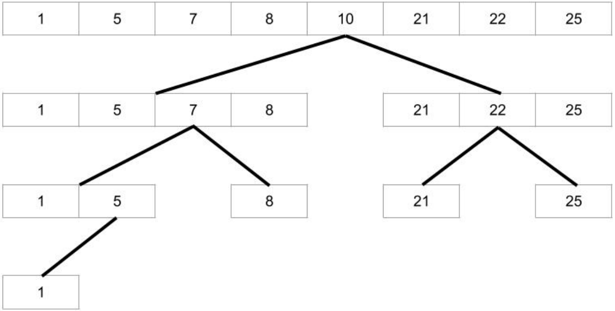
Binäre Suche — Spezifikation

- Eingabe
  - `lst : list[T]` streng aufsteigend sortierte Liste
  - `key : T` Suchbegriff
- Ausgabe
  - `i` sodass `lst[i] == key`, falls `key in lst`
  - andernfalls: `None`

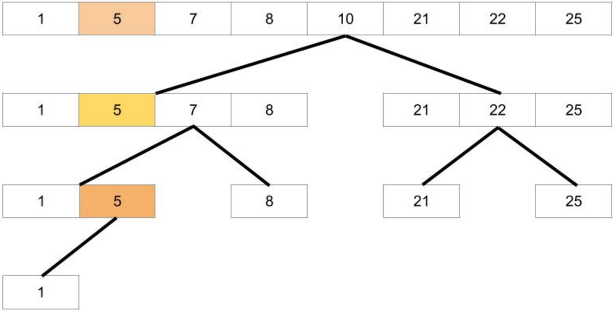
Idee

- Betrachte die Liste wie einen binären Suchbaum
- Wähle ein beliebiges Element als Wurzel und vergleiche mit `key`: alle Elemente links davon sind kleiner, rechts davon größer
- Suche weiter im rechten oder linken Listensegment
- Optimiere die Effizienz durch geschickte Wahl der Wurzel (in der Mitte)

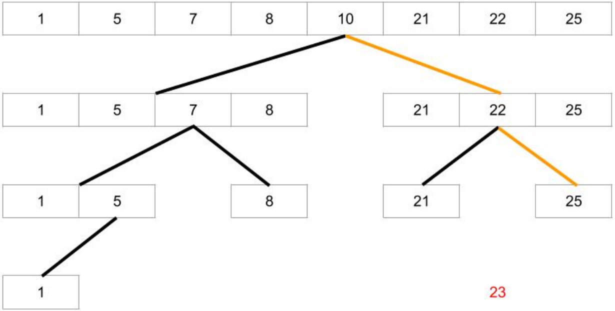
Binäre Suche



Binäre Suche (5) = 1



Binäre Suche (23) = None



```python
def bsearch (lst : list[int], key : int) -> Optional[int]:
    n = len (lst)
    if n == 0:
        return None # key not in empty list
    m = n//2        # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch (lst[:m], key)
    else: # lst[m] < key
        r = bsearch (lst[m+1:], key)
        return None if r is None else r+m+1
```

Kritik

- Funktioniert ..., aber `lst[:m]` und `lst[m+1:]` erzeugen jeweils **Kopien** der halben Liste ($\rightarrow$ ineffizient!)

Kritik

- Funktioniert ..., aber `lst[:m]` und `lst[m+1:]` erzeugen jeweils **Kopien** der halben Liste ($\rightarrow$ ineffizient!)
- Alternative: Suche jeweils zwischen Startpunkt und Endpunkt in `lst`

Kritik

- Funktioniert ..., aber `lst[:m]` und `lst[m+1:]` erzeugen jeweils **Kopien** der halben Liste ($\rightarrow$ ineffizient!)
- Alternative: Suche jeweils zwischen Startpunkt und Endpunkt in `lst`
- Der rekursive Aufruf muss nur den Start- bzw. Endpunkt verschieben

```
def bsearch (lst : list[int], key : int) -> Optional[int]:
    return bsearch2 (lst, key, 0, len (lst))

def bsearch2 (lst : list[int], key : int,
              low : int, high : int) -> Optional[int]:
    """ search for key in lst between low
    (inclusive) and high (exclusive)
    assumes low <= high """
    ...
```

Binäre Suche ohne Kopieren

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    n = hi - lo     # length of list segment
    if n == 0:
        return None # key not in empty segment
    m = lo + n//2   # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Binäre Suche ohne Kopieren

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    n = hi - lo     # length of list segment
    if n == 0:
        return None # key not in empty segment
    m = lo + n//2   # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

Binäre Suche ohne Kopieren

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    n = hi - lo     # length of list segment
    if n == 0:
        return None # key not in empty segment
    m = lo + n//2   # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

- Der Test `n == 0` entspricht `hi - lo == 0` und damit `lo == hi`

Binäre Suche ohne Kopieren

```python
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    n = hi - lo     # length of list segment
    if n == 0:
        return None # key not in empty segment
    m = lo + n//2   # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

- Der Test `n == 0` entspricht `hi - lo == 0` und damit `lo == hi`
- `lo + (hi - lo)//2 == (lo + hi)//2`

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    if lo == hi:
        return None # key not in empty segment
    m = (lo + hi)//2   # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    if lo == hi:
        return None # key not in empty segment
    m = (lo + hi)//2    # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    if lo == hi:
        return None # key not in empty segment
    m = (lo + hi)//2    # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

- Jeder rekursive Aufruf von `bsearch2` erfolgt in einer **`return`** Anweisung.

Binäre Suche ohne Kopieren, vereinfacht

```
def bsearch2 (lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    if lo == hi:
        return None # key not in empty segment
    m = (lo + hi)//2   # position of root
    if lst[m] == key:
        return m
    elif lst[m] > key:
        return bsearch2 (lst, key, lo, m)
    else: # lst[m] < key
        return bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
```

Beobachtungen

- Jeder rekursive Aufruf von `bsearch2` erfolgt in einer **`return`** Anweisung.
- Solche Aufrufe heißen **endrekursiv**.

Endrekursive Funktionen

Definition

Eine Funktion heißt **endrekursiv**, falls alle rekursiven Aufrufe endrekursiv sind.

Endrekursive Funktionen

Definition

Eine Funktion heißt **endrekursiv**, falls alle rekursiven Aufrufe endrekursiv sind.

Jede endrekursive Funktion kann durch eine `while`-Schleife (Iteration) implementiert werden.

Endrekursive Funktionen

Definition

Eine Funktion heißt **endrekursiv**, falls alle rekursiven Aufrufe endrekursiv sind.

Jede endrekursive Funktion kann durch eine `while`-Schleife (Iteration) implementiert werden.

Elimination von Endrekursion durch Iteration

- Die Abbruchbedingung der Rekursion wird negiert zur Bedingung der `while`-Schleife.
- Der Rest des Funktionsrumpfs wird zum Rumpf der `while`-Schleife.
- Die endrekursiven Aufrufe werden zu Zuweisungen an die Parameter.

Endrekursive Funktionen

Definition

Eine Funktion heißt **endrekursiv**, falls alle rekursiven Aufrufe endrekursiv sind.

Jede endrekursive Funktion kann durch eine `while`-Schleife (Iteration) implementiert werden.

Elimination von Endrekursion durch Iteration

- Die Abbruchbedingung der Rekursion wird negiert zur Bedingung der `while`-Schleife.
- Der Rest des Funktionsrumpfs wird zum Rumpf der `while`-Schleife.
- Die endrekursiven Aufrufe werden zu Zuweisungen an die Parameter.

Warum? In Python sind `while`-Schleifen effizienter als rekursive Funktionen.

Beispiel: bsearch2 ist endrekursive Funktion

Abbruchbedingung der Rekursion

```
    if lo == hi:
        return None
```

wird negiert zur Bedingung der `while`-Schleife

```
    while lo != hi:
        ...
    else:
        return None
```

Beispiel: bsearch2 ist endrekursive Funktion

Endrekursive Aufrufe

```
return bsearch2 (lst, key, lo, m)
```

werden zu Zuweisungen an die Parameter

```
lst, key, lo, hi = lst, key, lo, m
```

bzw. hier reicht

```
hi = m
```

Binäre Suche ohne Kopieren, iterativ

```python
def bsearch2 (
        lst : list[int], key : int, lo:int, hi:int) -> Optional[int]:
    while lo != hi:
        m = (lo + hi)//2
        if lst[m] == key:
            return m
        elif lst[m] > key:
            hi = m    # bsearch2 (lst, key, lo, m)
        else: # lst[m] < key
            lo = m+1  # bsearch2 (lst, key, m+1, hi)
    else:
        return None
```

Erinnerung: Suche im binären Suchbaum

Ebenfalls endrekursiv


```python
def search(tree : Optional[Node], item : Any) -> bool:
    if tree is None:
        return False
    elif tree.mark == item:
        return True
    elif tree.mark > item:
        return search(tree.left, item)
    else:
        return search(tree.right, item)
```

- Gleiches Muster … nicht überraschend

Suche im binären Suchbaum

Iterativ, umgewandelt gemäß Schema

```
def search(tree : Optional[Node], item : Any) -> bool:
    while tree is not None:
        if tree.mark == item:
            return True
        elif tree.mark > item:
            tree = tree.left
        else:
            tree = tree.right
    else:
        return False
```

Potenzieren

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Die selben Gleichungen in Python-Syntax hingeschrieben

```
power (x, 0)   == 1
power (x, n+1) == x * power (x, n)
```

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Die selben Gleichungen in Python-Syntax hingeschrieben

```
power (x, 0)   == 1
power (x, n+1) == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Die selben Gleichungen in Python-Syntax hingeschrieben

```
power (x, 0)    == 1
power (x, n+1) == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Die selben Gleichungen in Python-Syntax hingeschrieben

```
power (x, 0)   == 1
power (x, n+1) == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
  - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Die selben Gleichungen in Python-Syntax hingeschrieben

```
power (x, 0)   == 1
power (x, n+1) == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
  - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder
  - der Nachfolger $1 + (n)$ einer natürlichen Zahl n.

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Die selben Gleichungen in Python-Syntax hingeschrieben

```
power (x, 0)    == 1
power (x, n+1) == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
  - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder
  - der Nachfolger $1 + (n)$ einer natürlichen Zahl n.
- Als Baum: 0 1+

n

Rekursion als Definitionstechnik: Potenzieren

- Mathematische Definition: $x^0 = 1 \qquad x^{n+1} = x \cdot x^n$
- Die selben Gleichungen in Python-Syntax hingeschrieben

```
power (x, 0)   == 1
power (x, n+1) == x * power (x, n)
```

- Wo ist da der Baum?
- Erinnerung: Induktive Definition der natürlichen Zahlen
  - Eine natürliche Zahl ist entweder 0 oder
  - der Nachfolger $1 + (n)$ einer natürlichen Zahl n.
- Als Baum: 0   1+

$$\begin{array}{c} 1+ \\ | \\ n \end{array}$$

- Daraus ergibt sich das folgende Codegerüst.

Potenzfunktion rekursiv

```
def power (x : float, n : int) -> float:
    """ x ** n for n >= 0 """
    if n == 0:
        return 1
    else:  # n = 1+n'
        return x * power (x, n-1)
```

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

    $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

  $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

    $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

    $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

        $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:

            $\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

→ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:
    → `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:
        → `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:
            → `power`(2,0) wählt if-Zweig und:
            ← `power`(2,0) gibt 1 zurück

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

  $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

    $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:

      $\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:

      $\leftarrow$ `power`(2,0) gibt 1 zurück

    $\leftarrow$ `power`(2,1) gibt $(2 \times 1) = 2$ zurück

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

  $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

    $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:

      $\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:

      $\leftarrow$ `power`(2,0) gibt 1 zurück

    $\leftarrow$ `power`(2,1) gibt $(2 \times 1) = 2$ zurück

  $\leftarrow$ `power`(2,2) gibt $(2 \times 2) = 4$ zurück

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:
    $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:
        $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:
            $\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:
            $\leftarrow$ `power`(2,0) gibt 1 zurück
        $\leftarrow$ `power`(2,1) gibt (2×1) = 2 zurück
    $\leftarrow$ `power`(2,2) gibt (2×2) = 4 zurück
$\leftarrow$ `power`(2,3) gibt (2×4) = 8 zurück

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

$\rightarrow$ `power`(2,3) wählt else-Zweig und ruft auf:

    $\rightarrow$ `power`(2,2) wählt else-Zweig und ruft auf:

        $\rightarrow$ `power`(2,1) wählt else-Zweig und ruft auf:

            $\rightarrow$ `power`(2,0) wählt if-Zweig und:

            $\leftarrow$ `power`(2,0) gibt 1 zurück

        $\leftarrow$ `power`(2,1) gibt (2×1) = 2 zurück

    $\leftarrow$ `power`(2,2) gibt (2×2) = 4 zurück

$\leftarrow$ `power`(2,3) gibt (2×4) = 8 zurück

Power ist **nicht** endrekursiv

```
def power (x : float, n : int) -> float:
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x * power (x, n-1)
```

Power ist **nicht** endrekursiv

```
def power (x : float, n : int) -> float:
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x * power (x, n-1)
```

- Aber wir könnten das Ergebnis auch in einem akkumulierenden Argument berechnen.

Power ist **nicht** endrekursiv

```
def power (x : float, n : int) -> float:
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x * power (x, n-1)
```

- Aber wir könnten das Ergebnis auch in einem akkumulierenden Argument berechnen.

```
def power_acc (x : float, n : int, acc : float = 1) -> float:
    if n==0:
        return acc
    else:
        return power_acc (x, n-1, acc * x)
```

Power ist **nicht** endrekursiv

```
def power (x : float, n : int) -> float:
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x * power (x, n-1)
```

- Aber wir könnten das Ergebnis auch in einem akkumulierenden Argument berechnen.

```
def power_acc (x : float, n : int, acc : float = 1) -> float:
    if n==0:
        return acc
    else:
        return power_acc (x, n-1, acc * x)
```

- Aufruf mit `power_acc (x, n)`; die Funktion `power_acc` ist endrekursiv ...

Iterative Power

- Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float = 1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Iterative Power

- Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float = 1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

- Startwert `acc = 1` im Funktionskopf definiert.

Iterative Power

- Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float = 1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

- Startwert `acc = 1` im Funktionskopf definiert.
- Jeder Aufruf `power_it (x, n)` verwendet `acc=1`.

Iterative Power

- Schematische Transformation in Iteration

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float = 1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

- Startwert `acc = 1` im Funktionskopf definiert.
- Jeder Aufruf `power_it (x, n)` verwendet `acc=1`.
- Ein Aufruf (z.B.) `power_it (x, n, 42)` startet mit `acc=42`.

Schneller Potenzieren

Efficient Power

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)`?

Efficient Power

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?`   0

Efficient Power

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?`

Efficient Power

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1

Efficient Power

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?`   0
- `power (x, 1)?`   1
- `power (x, 2)?`

Efficient Power

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?` 2

Efficient Power

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?` 2
- `power (x, n)?`

Efficient Power

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?` 2
- `power (x, n)?` n

Efficient Power

```
def power_it (x : float, n : int, acc : float=1):
    while n != 0:
        n, acc = n-1, acc*x
    else:
        return acc
```

Wieviele Multiplikationen braucht es zur Berechnung von

- `power (x, 0)?` 0
- `power (x, 1)?` 1
- `power (x, 2)?` 2
- `power (x, n)?` n

Mehr Multiplikationen als unbedingt notwendig!

Alternative Definition von Power


```
power(x, 0)       == 1
power(x, 2*n)     == power(x*x, n)       # n>0
power(x, 2*n+1)   == x * power(x*x, n)   # n>=0
```

Alternative Definition von Power

```
power(x, 0)      == 1
power(x, 2*n)    == power(x*x, n)     # n>0
power(x, 2*n+1) == x * power(x*x, n) # n>=0
```

- Alternative Aufteilung der natürlichen Zahlen.

Alternative Definition von Power

```
power(x, 0)      == 1
power(x, 2*n)    == power(x*x, n)     # n>0
power(x, 2*n+1) == x * power(x*x, n) # n>=0
```

- Alternative Aufteilung der natürlichen Zahlen.
- Jede natürliche Zahl ungleich 0 ist entweder gerade oder ungerade.

Alternative Definition von Power

```
power(x, 0)       == 1
power(x, 2*n)     == power(x*x, n)     # n>0
power(x, 2*n+1)   == x * power(x*x, n) # n>=0
```

- Alternative Aufteilung der natürlichen Zahlen.
- Jede natürliche Zahl ungleich 0 ist entweder gerade oder ungerade.
- In jedem Fall können wir die Berechnung von `power` entweder sofort abbrechen oder auf die `power` mit einem **echt kleineren** Exponenten `n` zurückführen.

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

Schnelle Exponentiation

```python
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$?

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$?

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$?

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$?

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? k+2

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? k+2
- Multiplikationen für $n < 2^k$: höchstens $2k \approx 2 \log_2 n$.

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? k+2
- Multiplikationen für $n < 2^k$: höchstens $2k \approx 2 \log_2 n$.
- Schneller als die `power` Funktion: logarithmisch viele Multiplikationen!

Schnelle Exponentiation

```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Multiplikationen für $n = 1$? 2
- Multiplikationen für $n = 2$? 3
- Multiplikationen für $n = 4$? 4
- Multiplikationen für $n = 2^k$? k+2
- Multiplikationen für $n < 2^k$: höchstens $2k \approx 2\log_2 n$.
- Schneller als die `power` Funktion: logarithmisch viele Multiplikationen!
- Berechnung von `n//2` und `n%2` ist billig. Warum?

Schnelle Exponentiation, iterativ?


```
def fast_power (x : float, n : int) -> float:
    if n == 0:
        return 1
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power (x*x, n//2)
    else: # n % 2 == 1
        return x * fast_power (x*x, n//2)
```

- Nicht endrekursiv!
- Aber es kann wieder ein akkumulierender Parameter eingeführt werden, der die äußeren Multiplikationen mit dem `x` durchführt.

Schnelle Exponentiation, endrekursiv!

```
def fast_power_acc (
        x : float, n : int, acc : float = 1) -> float:
    if n == 0:
        return acc
    elif n % 2 == 0:
        return fast_power_acc(x*x, n//2, acc)
    else: # n % 2 == 1
        return fast_power_acc(x*x, n//2, acc*x)
```

Schnelle Exponentiation, iterativ!

Schematische Transformation liefert

```
def fast_power_it (
        x : float, n : int, acc : float = 1) -> float:
    while n != 0:
        if n % 2 == 0:
            x, n, acc = (x*x, n//2, acc)
        else: # n % 2 == 1
            x, n, acc = (x*x, n//2, acc*x)
    else:
        return acc
```

Sortieren

Sortieren — Spezifikation

Sortieren

- Eingabe
  - Liste `lst : list[T]`
  - (Ordnung <= auf den Listenelementen vom Typ `T`)
- Ausgabe
  - aufsteigend sortierte Liste (gemäß <=)
  - jedes Element muss in der Ausgabe genauso oft vorkommen wie in der Eingabe

Sortieren — Spezifikation

Sortieren

- Eingabe
  - Liste `lst : list[T]`
  - (Ordnung <= auf den Listenelementen vom Typ `T`)
- Ausgabe
  - aufsteigend sortierte Liste (gemäß <=)
  - jedes Element muss in der Ausgabe genauso oft vorkommen wie in der Eingabe

Sortieren durch Partitionieren

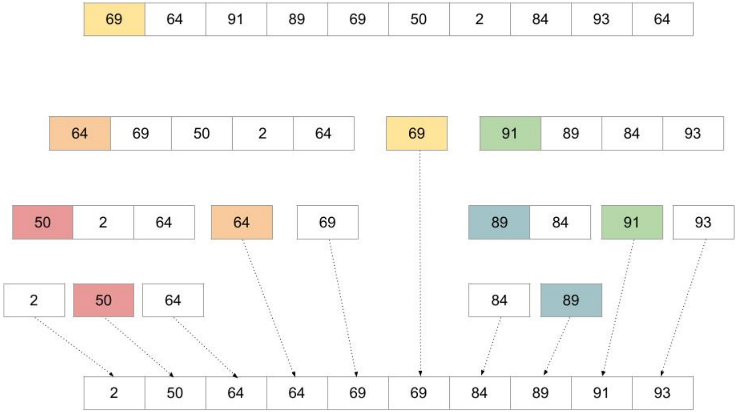
- Quicksort
- Erdacht von Sir C.A.R. Hoare um 1960
- Lange Zeit einer der schnellsten Sortieralgorithmen

Quicksort

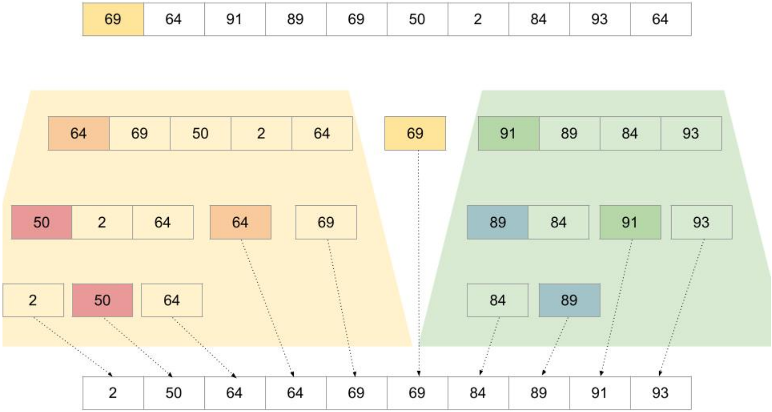
Vorgehensweise

- Falls `lst` leer ist, so ist die Ausgabe die leere Liste.
- Sonst wähle und entferne ein beliebiges Element `p` aus `lst`.
- Sei `lst_lo` die Liste der Elemente aus `lst`, die `<= p` sind.
- Sei `lst_hi` die Liste der Elemente aus `lst`, die nicht `<= p` sind.
- Sortiere `lst_lo` und `lst_hi` mit Ergebnissen `sort_lo` und `sort_hi`.
- Dann ist `sort_lo + [p] + sort_hi` eine sortierte Version von `lst`.

Quicksort Beispiel



Quicksort Beispiel



Implementierung

```
def quicksort (lst : list[int]) -> list[int]:
    if len (lst) <= 1:
        return lst
    else:
        p, lst_lo, lst_hi = partition (lst)
        return (quicksort (lst_lo) + [p] + quicksort (lst_hi))
```

Implementierung

```
def quicksort (lst : list[int]) -> list[int]:
    if len (lst) <= 1:
        return lst
    else:
        p, lst_lo, lst_hi = partition (lst)
        return (quicksort (lst_lo) + [p] + quicksort (lst_hi))
```

Wunschdenken

Annahme: `partition (lst)` liefert für `len (lst)>=1` ein 3-Tupel `(p, lst_lo, lst_hi)`, sodass

- p ist ein Element von `lst`
- `lst_lo` enthält die Elemente z von `lst` mit `z <= p`
- `lst_hi` enthält die Elemente z von `lst` mit `z > p`

Partition

```
def partition (lst : list[int]) -> tuple[int, list[int], list[int]]:
    """ assume len (lst) >= 1 """
    p = lst[0]
    lst_lo = []
    lst_hi = []
    for x in lst[1:]:
        if x <= p:
            lst_lo += [x]
        else:
            lst_hi += [x]
    return p, lst_lo, lst_hi
```

- Codegerüst für Listenverarbeitung
- Zwei Akkumulatoren `lst_lo` und `lst_hi`

Betrachtung von Quicksort

- Der rekursive Algorithmus ist die einfachste Beschreibung von Quicksort.
- Eine iterative Implementierung ist möglich.
- Diese ist aber deutlich schwieriger zu verstehen.

Lindenmayer Systeme

Wikipedia

Bei den Lindenmayer- oder L-Systemen handelt es sich um einen mathematischen Formalismus, der 1968 von dem ungarischen theoretischen Biologen Aristid Lindenmayer als Grundlage einer axiomatischen Theorie biologischer Entwicklung vorgeschlagen wurde. In jüngerer Zeit fanden L-Systeme Anwendung in der Computergrafik bei der Erzeugung von Fraktalen und in der realitätsnahen Modellierung von Pflanzen.

Lindenmayer Systeme

Wikipedia

Bei den Lindenmayer- oder L-Systemen handelt es sich um einen mathematischen Formalismus, der 1968 von dem ungarischen theoretischen Biologen Aristid Lindenmayer als Grundlage einer axiomatischen Theorie biologischer Entwicklung vorgeschlagen wurde. In jüngerer Zeit fanden L-Systeme Anwendung in der Computergrafik bei der Erzeugung von Fraktalen und in der realitätsnahen Modellierung von Pflanzen.

Lindenmayer Systeme, formal

Definition

Ein 0L-System ist ein Tupel $G = (V, \omega, P)$. Dabei ist

- V eine Menge von Symbolen (Alphabet),
- $\omega \in V^*$ ein String von Symbolen und
- $P \subseteq V \times V^*$ eine Menge von Produktionen, sodass zu jedem $A \in V$ mindestens eine Produktion $(A, w) \in P$ existiert.

Lindenmayer Systeme, formal

Definition

Ein 0L-System ist ein Tupel $G = (V, \omega, P)$. Dabei ist

- V eine Menge von Symbolen (Alphabet),
- $\omega \in V^*$ ein String von Symbolen und
- $P \subseteq V \times V^*$ eine Menge von Produktionen, sodass zu jedem $A \in V$ mindestens eine Produktion $(A, w) \in P$ existiert.

Beispiel (Lindenmayer): 0L-System für Algenwachstum

- $V = \{A, B\}$
- $\omega = A$
- $P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

Wie rechnet ein 0L-System?

Definition (Berechnungsrelation eines 0L-Systems)

Sei $G = (V, \omega, P)$ ein 0L-System.
Sei $A_1A_2 \ldots A_n$ ein String über Symbolen aus V (also $A_i \in V$).
Ein Rechenschritt von G ersetzt **jedes** Symbol durch eine zugehörige rechte Produktionsseite:

$$A_1A_2 \ldots A_n \Rightarrow w_1w_2 \ldots w_n$$

wobei $(A_i, w_i) \in P$, für $1 \leq i \leq n$.
Die Sprache von G besteht aus allen Strings, die aus ω durch endlich viele $\Rightarrow$-Schritte erzeugt werden können.

Beispiel: Algenwachstum

$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

1. A

Beispiel: Algenwachstum

$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

1. A
2. BA

Beispiel: Algenwachstum

$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A
2. BA
3. ABA

Beispiel: Algenwachstum

$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A
2. BA
3. ABA
4. $BAABA$

Beispiel: Algenwachstum

$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A
2. BA
3. ABA
4. $BAABA$
5. $ABABAABA$

Beispiel: Algenwachstum

$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

1. A
2. BA
3. ABA
4. $BAABA$
5. $ABABAABA$
6. $BAABAABABAABA$

Beispiel: Algenwachstum

$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \rightarrow BA, B \rightarrow A\}$

1. A
2. BA
3. ABA
4. $BAABA$
5. $ABABAABA$
6. $BAABAABABAABA$
7. $ABABAABABAABAABABAABA$

Beispiel: Algenwachstum

$V = \{A, B\}, \quad \omega = A, \quad P = \{A \to BA, B \to A\}$

1. A
2. BA
3. ABA
4. $BAABA$
5. $ABABAABA$
6. $BAABAABABAABA$
7. $ABABAABABAABAABABAABA$
8. usw

Beispiel Kochkurve

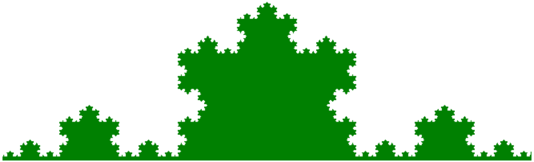
- Die Kochkurve ist ein Fraktal.

Beispiel Kochkurve

- Die Kochkurve ist ein Fraktal.
- D.h. eine selbstähnliche Kurve mit rekursiver Beschreibung und weiteren spannenden Eigenschaften.

Beispiel Kochkurve

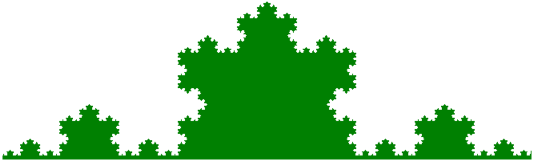
- Die Kochkurve ist ein Fraktal.
- D.h. eine selbstähnliche Kurve mit rekursiver Beschreibung und weiteren spannenden Eigenschaften.



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kochkurve.png

Beispiel Kochkurve

- Die Kochkurve ist ein Fraktal.
- D.h. eine selbstähnliche Kurve mit rekursiver Beschreibung und weiteren spannenden Eigenschaften.



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kochkurve.png

- Sie kann durch ein 0L-System beschrieben werden.

Kochkurve

0L-System für die Kochkurve

- $V = \{F, +, -\}$
- $\omega = F$
- $P = \{F \mapsto F + F - F + F\}$ sowie $+ \mapsto +$ und $- \mapsto -$

Kochkurve

0L-System für die Kochkurve

- $V = \{F, +, -\}$
- $\omega = F$
- $P = \{F \mapsto F + F - F + F\}$ sowie $+ \mapsto +$ und $- \mapsto -$

Interpretation der Symbole als Zeichenoperationen

- F Strecke vorwärts zeichnen
- $+$ um 60° nach links abbiegen
- $-$ um 120° nach rechts abbiegen

Zeichenmodell: Turtle-Graphics

Idee der "Schildkrötengrafik"

Eine Schildkröte sitzt auf einer Zeichenfläche. Sie kann eine bestimmte Strecke geradeaus gehen oder abbiegen. Sie kann den Hintern heben und absenken. Wenn ihr Hintern dabei über den Boden schleift, hinterläßt sie einen geraden Strich.

Zeichenmodell: Turtle-Graphics

Idee der “Schildkrötengrafik”

Eine Schildkröte sitzt auf einer Zeichenfläche. Sie kann eine bestimmte Strecke geradeaus gehen oder abbiegen. Sie kann den Hintern heben und absenken. Wenn ihr Hintern dabei über den Boden schleift, hinterläßt sie einen geraden Strich.

Befehle an die Schildkröte

```
from turtle import *
pencolor('black') #use the force
pendown()         #let it all hang out
forward(100)
left(120)
forward(100)
left(120)
forward(100)
```

Schildkröten-Interpretation

Die Operationen

- F `forward (size)`
- $+$ `left (60)`
- $-$ `right (120)`

Schildkröten-Interpretation

Die Operationen

- F `forward (size)`
- $+$ `left (60)`
- $-$ `right (120)`

Die Produktion $F \mapsto F + F - F + F$

```
def koch(size:float, n:int):
    #...
    koch(size/3, n-1) #F
    left(60)          #+
    koch(size/3, n-1) #F
    right(120)        #-
    koch(size/3, n-1) #F
    left(60)          #+
    koch(size/3, n-1) #F
```

Die letzte Generation

```
def koch (size:float, n:int):
    if n == 0:
        forward(size)
    else:
        koch (size/3, n-1)
        left(60)
        koch (size/3, n-1)
        right(120)
        koch (size/3, n-1)
        left(60)
        koch (size/3, n-1)
```

Beispiel: Fraktaler Binärbaum

0L-System für fraktale Binärbäume

- $V = \{0, 1, [,]\}$
- $\omega = 0$
- $P = \{1 \mapsto 11, 0 \mapsto 1[0]0\}$

Beispiel: Fraktaler Binärbaum

0L-System für fraktale Binärbäume

- $V = \{0, 1, [,]\}$
- $\omega = 0$
- $P = \{1 \mapsto 11, 0 \mapsto 1[0]0\}$

Interpretation

- 0 Strecke vorwärts zeichnen mit Blatt am Ende
- 1 Strecke vorwärts zeichnen
- [Position und Richtung merken und um 45° nach links abbiegen
-] Position und Richtung von zugehöriger öffnender Klammer wiederherstellen und um 45° nach rechts abbiegen

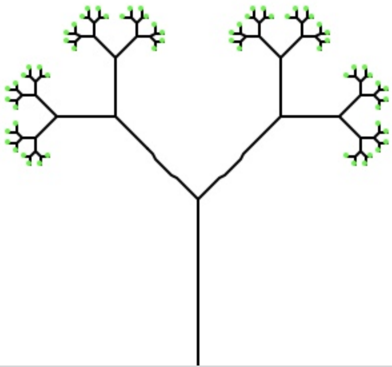
Turtle-Graphics Implementierung Teil 1


```
def btree_1 (size:float, n:int):
    if n == 0:
        forward (size)
    else:
        n = n - 1
        btree_1 (size/3, n)
        btree_1 (size/3, n)
```

- `n==0`: letzte Generation erreicht
- Faktor $1/3$ willkürlich gewählt

Turtle-Graphics Implementierung Teil 0

```
def btree_0 (size:float, n:int):
    if n == 0:
        forward(size)          # line segment
        dot (2, 'green')       # draw leaf
    else:
        n = n - 1
        btree_1 (size/3, n)   # "1"
        pos = position()       # "["
        ang = heading()
        left(45)
        btree_0 (size/3, n)   # "0"
        penup()                # "]"
        setposition (pos)
        setheading (ang)
        pendown()
        right (45)
        btree_0 (size/3, n)   # "0"
```



Zusammenfassung

- Induktion ist eine Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Funktionen auf induktiv definierten Daten (d.h. baumartigen Strukturen) sind meist rekursiv.
- Sie terminieren, weil die rekursiven Aufrufe stets auf Teilstrukturen erfolgen.
- In Python ist Rekursion oft nicht die effizienteste Implementierung einer Funktion!
- Endrekursion kann schematisch in effiziente Iteration umgewandelt werden.
- Jede rekursive Funktion lässt sich schematisch in eine äquivalente endrekursive Function umzuwandeln.